



Politecnico di Torino

Laurea triennale in Ing. Aerospaziale

Analisi strutturale dinamica mediante calcolo FEM di una piastra strumentata per Applicazioni Aerospaziali

Relatori:

Prof. Giacomo Frulla

Prof. Leonardo Reyneri

Candidato:

Lorenzo Longo

Analisi strutturale dinamica di una piastra strumentata: perché?

- Determinare la risposta in dinamica autonoma di strutture complesse, vincolate o libere
- Evitare fenomeni di risonanza
- Valutare gli stati di sforzo/deformazione del sistema vibrante

Obiettivi dello studio:

- Studio preliminare di comparazione fra strumenti FEM e teorici
- Analisi modale di piastra semplice, vari casi di vincolo
- Analisi modale di piastra complessa, vari casi di vincolo
- Analisi modale di piastra strumentata, vari casi di vincolo
- Analisi modale di una tipica applicazione, condizioni operative

Tabella riassuntiva dei principali test eseguiti

	FEM Topology	a[m]	h[m]	Vincolo	
Tipo1	Shell	0.0825	0.0008	S-S-S-S/C-C-C-C	FEM per lato
		0.165	0.0016	S-S-S-S/C-C-C-C	10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100
		0.33	0.0032	S-S-S-S/C-C-C-C	
		0.16	0.001, 0.002, 0.003 0.004, 0.005, 0.006 0.007, 0.008, 0.009, 0.01	S-S-S-S	
	Tet10	0.165	0.0016	S-S-S-S/C-C-C-C	
	Hex	0.165	0.0016	S-S-S-S/C-C-C-C	Massa[g]
Tipo1+Massa Concentrata	Shell	0.15	0.00000015	S-S-S-S	2.5069E-10
		0.15	0.0015	S-S-S-S	250.686813
		0.15	0.015	S-S-S-S	250686.813
Tipo2	Hex	0.165	0.0016-0.0016-0.002	S-S-S-S/C-C-C-C	
	Tet10	0.0825	0.0008-0.0008-0.001		
		0.165	0.0016-0.0016-0.002	S-S-S-S/C-C-C-C	
		0.33	0.0032-0.0032-0.004		Massa[g]
Tipo2+Massa	Tet10	0.165	0.0016-0.0016-0.002	S-S-S-S/C-C-C-C	20, 40, 60, 80, 100

Teoria di Poisson-Kirchhoff delle piastre sottili

- Equazione della superficie inflessa della piastra

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \frac{\bar{m}}{D} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0$$

- Campo di spostamenti trasversali assunto

$$w = w_0(x, y) \cos(\omega t + t_0)$$

- Sviluppo di w_0 in serie doppia di Fourier \longrightarrow Metodo degli Autovalori
- Frequenze naturali per la piastra appoggiata lungo i bordi

$$f_{mn} = \frac{\pi(m^2 + \gamma^2 n^2)}{2a^2} \sqrt{\frac{D}{\bar{m}}}$$

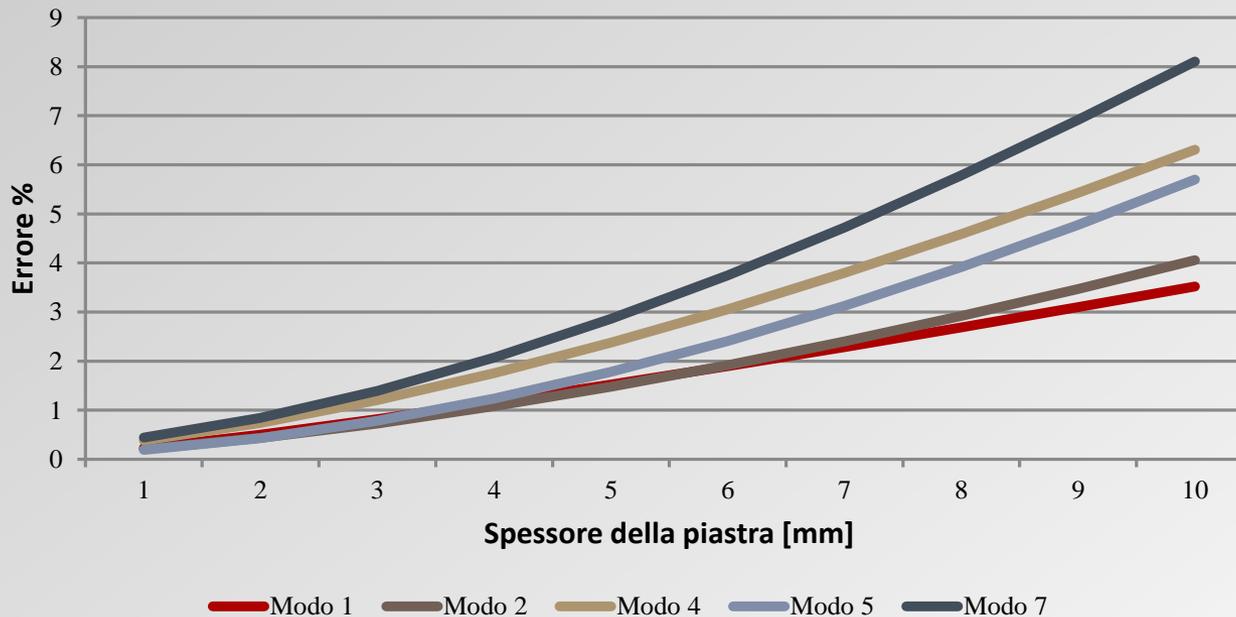
Influenza dello spessore

Spessore della piastra variato da 1 a 10 mm a parità di condizioni.

Parametri materiale			Dimensioni	
E[MPa]	ν	$\rho \left[\frac{kg}{m^3} \right]$	a[m]	b[m]
73000	0,3	2810	0.16	0.16

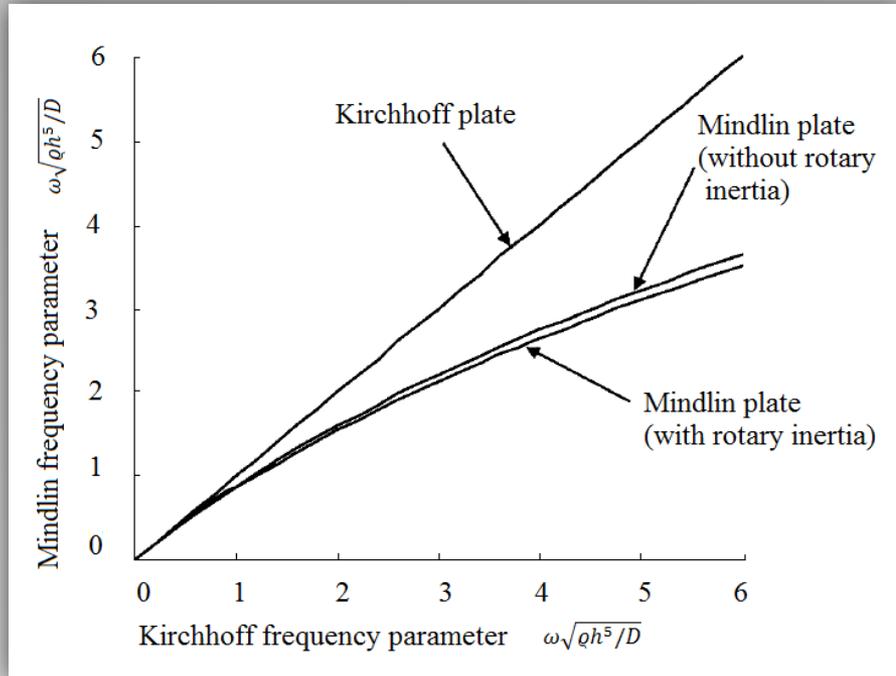
- Errore crescente con lo spessore
- Errore maggiore per modi più alti

Errore% - Spessore Piastra



Limite di validità
della teoria di
Kirchhoff

Teoria di Mindlin



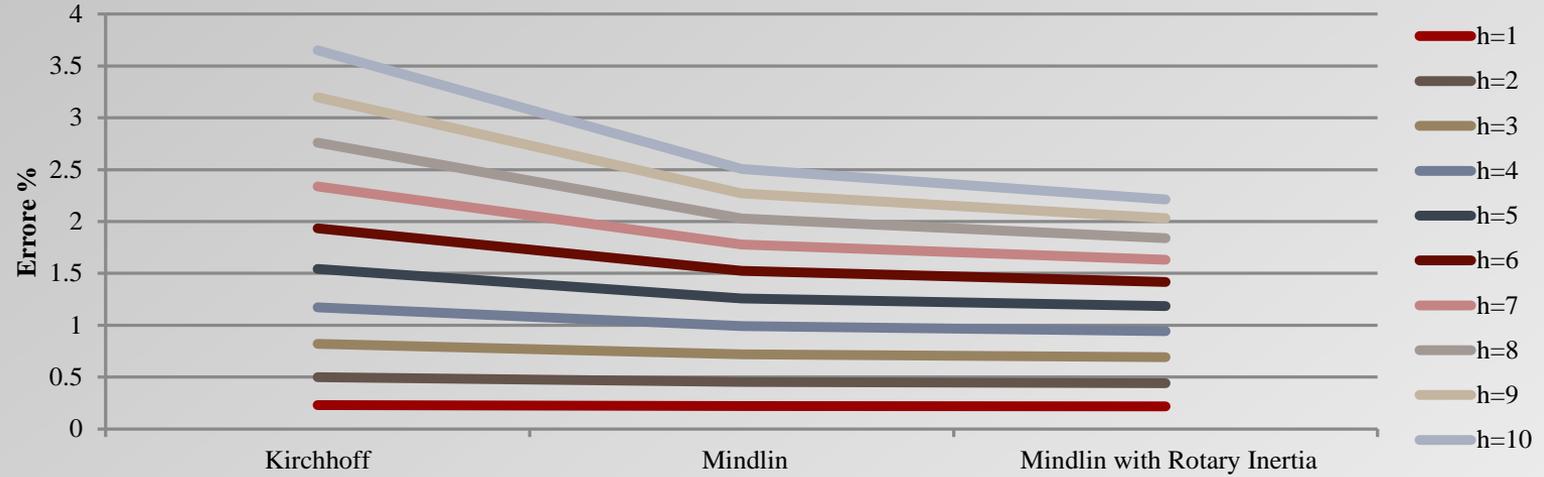
- Maggiore precisione per piastre spesse e frequenze alte
- Shear Correction Factor di Wittrick

$$k^2 = \frac{5}{(6 - \nu)}$$

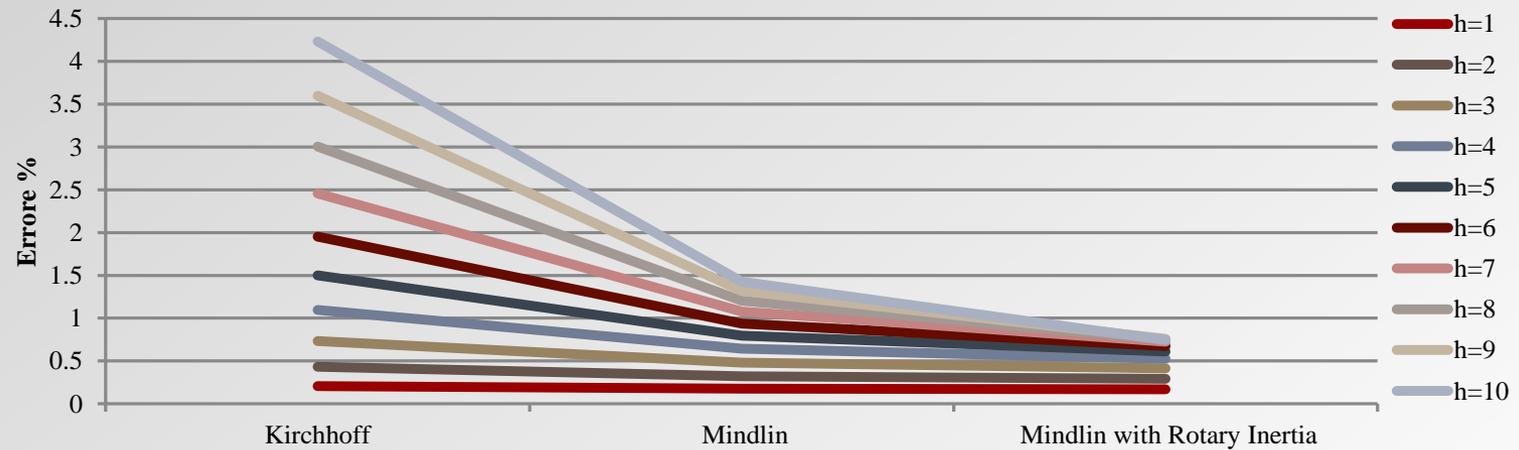
- Relazione delle frequenze fra classi di Piastre

$$\omega_M^2 = \frac{6Gk^2}{\rho h^2} \left\{ \left[1 + \frac{1}{12} \omega_K h^2 \sqrt{\frac{\rho h}{D}} \left(1 + \frac{2}{k^2(1-\nu)} \right) \right] - \sqrt{\left[1 + \frac{1}{12} \omega_K h^2 \sqrt{\frac{\rho h}{D}} \left(1 + \frac{2}{k^2(1-\nu)} \right) \right]^2 - \frac{\rho h^2}{3Gk^2} \omega_K^2} \right\}$$

Modo 1



Modo 2



Modello FEM con Massa Concentrata

$$\mu = \frac{M_i}{\rho h a^2}$$

$$\varepsilon = \frac{h}{2a}$$

$$\Omega^2 = \frac{D}{\rho h} \frac{1}{a^4}$$

Modello FEM, piastra quadrata:

- Mesh: 40x40 Elementi Finiti 2D shell
- Elemento CONM2 *Lumped* zero-dimensionale rigidamente fissata al nodo centrale
- Vincolo agente sui gradi di libertà traslazionali
- Influenza minore sui modi con deformazione nulla nel nodo di collegamento.

$\varepsilon=0,0000005$

MODO	m	n	Nicholson	FEM	SCARTO%
1	1	1	13.729	13.707	0.1619
2	1	2	49.348	49.265	0.1678
3	2	2	78.957	78.653	0.3851
4	1	3	65.005	64.78	0.3467
5	2	3	128.3	127.674	0.4877
6	3	3	151.97	150.935	0.6813
7	1	4	167.78	167.516	0.1573
8	2	4	197.39	196.337	0.5335
9	1	5	211.73	210.556	0.5546
10	3	4	246.74	244.435	0.9343
11	2	5	286.22	284.653	0.5473
12	3	5	299.77	297.484	0.7627
13	4	4	315.83	311.866	1.2551

Piastra piana: modelli Shell, 3D Tet10, 3D Brick

E [MPa]	ν	$\rho \left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right]$	a [m]	h [m]
72000	0,33	2810	0,165	0,0016

MODO	Mindlin	2D Shell	SCARTO%	3D Brick	SCARTO%	3D Tet10	SCARTO%
1	285.70	284.74	0.3369	297.36	4.08	297.07	3.9788
2	713.89	712.03	0.261	711.7	0.3073	711.7	0.3073
3	713.89	712.04	0.2596	713.11	0.1097	713.19	0.0986
4	1141.65	1136	0.4949	1138.7	0.2584	1139.6	0.1796
5	1426.58	1424	0.1809	1426.8	0.0153	1426.8	0.0153
6	1426.58	1424.1	0.1739	1452.3	1.8028	1451.7	1.7608
7	1853.61	1843.9	0.5242	1843.3	0.5566	1846.2	0.4002
8	1853.61	1844	0.5188	1849.2	0.2383	1852.4	0.0657
9	2564.39	2419.4	5.6539	2374.9	7.3892	2372.7	7.475
10	2564.39	2419.4	5.6539	2426.4	5.3809	2425.6	5.4121

Frequenze naturali [Hz]; Vincolo: S-S-S-S

MODO	Leissa	2D Shell	SCARTO%	3D Brick	SCARTO%	3D Tet10	SCARTO%
1	511.72	519.9	1.5982	522.77	2.1591	523.75	2.3506
2	1062.81	1059.1	0.3487	1065.9	0.2911	1068.3	0.5169
3	1062.81	1059.1	0.3487	1065.9	0.2911	1068.5	0.5357
4	1566.8	1557.5	0.5936	1568.6	0.1148	1577.4	0.6765
5	1919.03	1896.7	1.1636	1911.2	0.408	1911.8	0.3767
6	1919.03	1906	0.6789	1920.5	0.0767	1925.7	0.3476
7	2396.64	2370	1.1114	2389.5	0.2977	2.401.90	0.2197
8	2396.64	2370	1.1114	2389.5	0.2977	2406.8	0.4241
9	3066.69	3030.9	1.1669	3058.8	0.2571	3059	0.2506
10	3066.69	3030.9	1.1669	3058.8	0.2571	3061.4	0.1723

Frequenze naturali [Hz]; Vincolo: C-C-C-C

- Scarto% massimo per le freq. fondamentali < 5%
- Modello shell maggiormente performante e agevole per piastre piane semplici

Piastra predisposta all'accoglimento di sistemi elettronici

Struttura principale in lega di alluminio

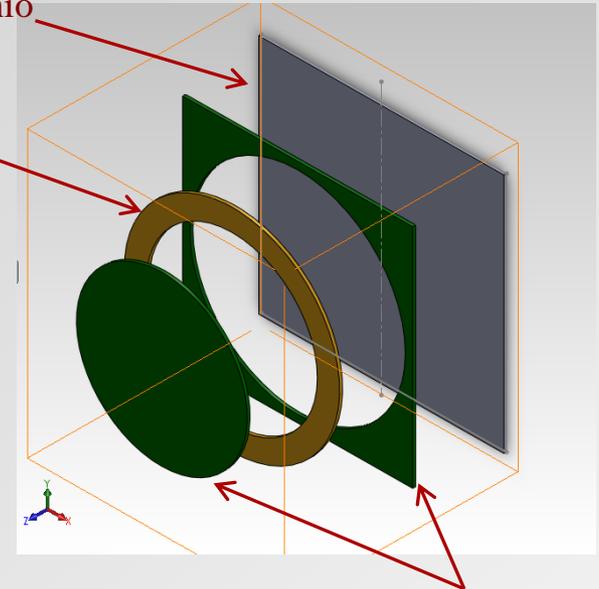
Valutazioni:

- Influenza delle dimensioni
- Modellazione con elementi

Brick: ✓ Completo controllo sul mesh
✓ Dimensioni uniformi
✓ Generalmente no probl. di singolarità
✗ Solidi Triparametrici
✗ Incompatibili con IW

Tet10: ✓ Buona precisione su qualunque geometria
✓ Facile controllo sulla densità locale
✓ Compatibili con IW
✗ Reticolo troppo fitto e pesante
✗ Problemi di singolarità
✗ Meno performanti per analisi con stress a flessione

Toroide in rame



Maschera in resina isolante

MODO	3D Tet10	3D Brick	SCARTO %
1	797.06	791.09	0.749
2	1517.5	1510.5	0.4613
3	1518.5	1510.5	0.5268
4	2232.1	2223.9	0.3674
5	2622.7	2615.3	0.2822
6	2800.3	2788	0.4392
7	3463.2	3451.4	0.3407
8	3464.6	3451.4	0.38
9	4394.3	4383.4	0.2481
10	4396.7	4383.4	0.3025

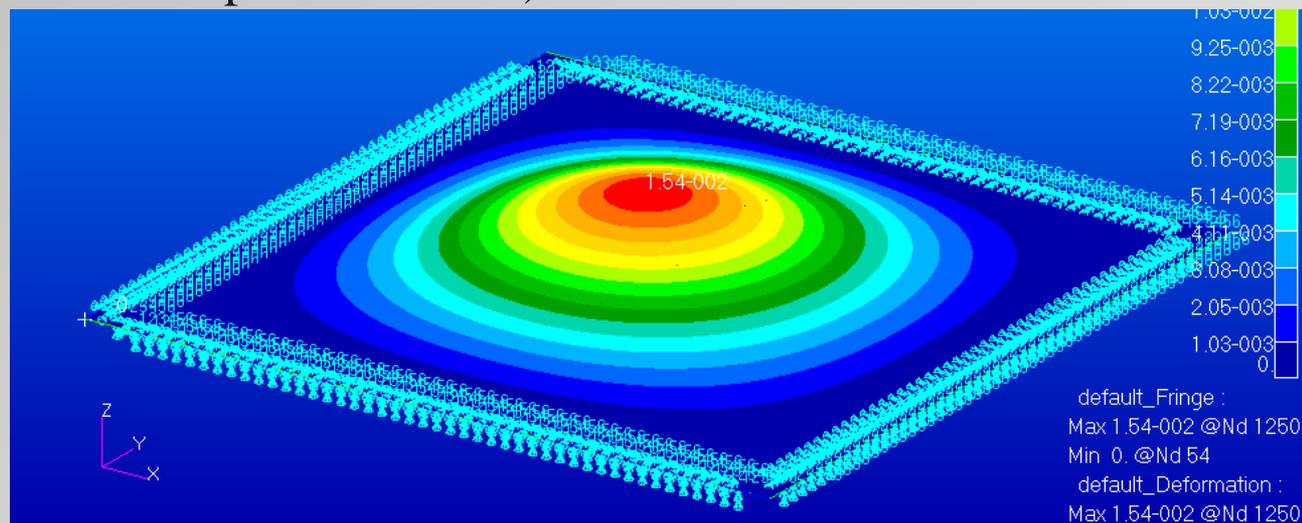
Frequenze Naturali [Hz]; C-C-C-C

MODO	3D Tet10	3D Brick	SCARTO %
1	466.36	465.91	0.0965
2	1068.3	1066	0.2153
3	1068.6	1066.2	0.2246
4	1621.6	1615.5	0.3762
5	2136.9	2128.5	0.3931
6	2103.9	2097.8	0.2899
7	2629.2	2623.7	0.2092
8	2656.2	2652	0.1581
9	3646.2	3630.4	0.4333
10	3655.1	3641.9	0.3611

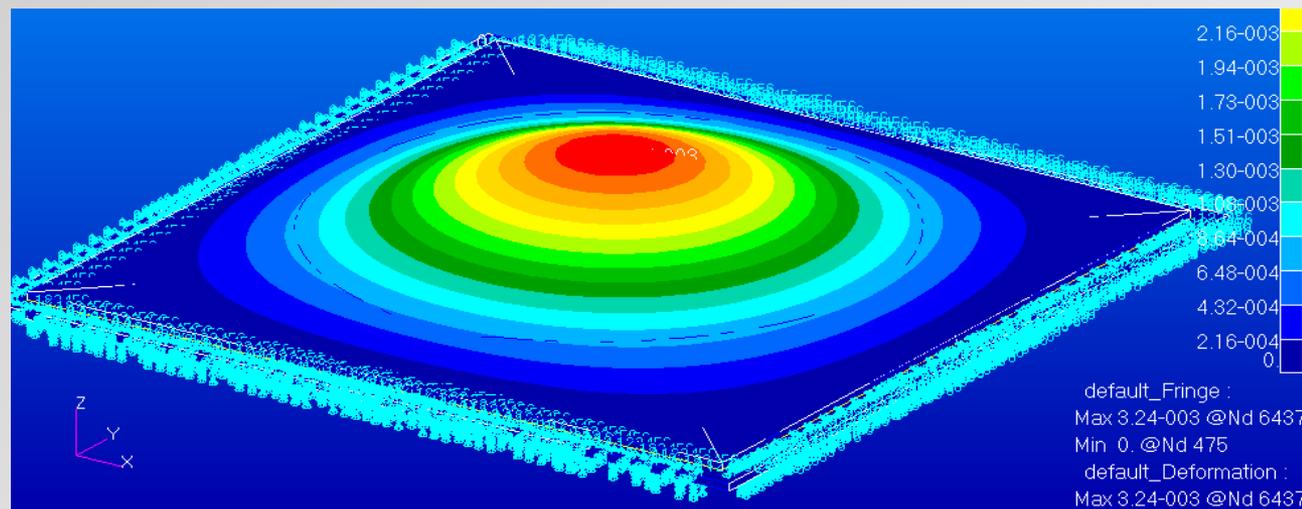
Frequenze Naturali [Hz]; S-S-S-S

- Deformate modali simili, frequenze in media più alte del 48,5% (appoggio) e del 44% (incastro)

- Irrigidimento globale, conseguenza dell'anello in rame (verificato anche tramite prove statiche)



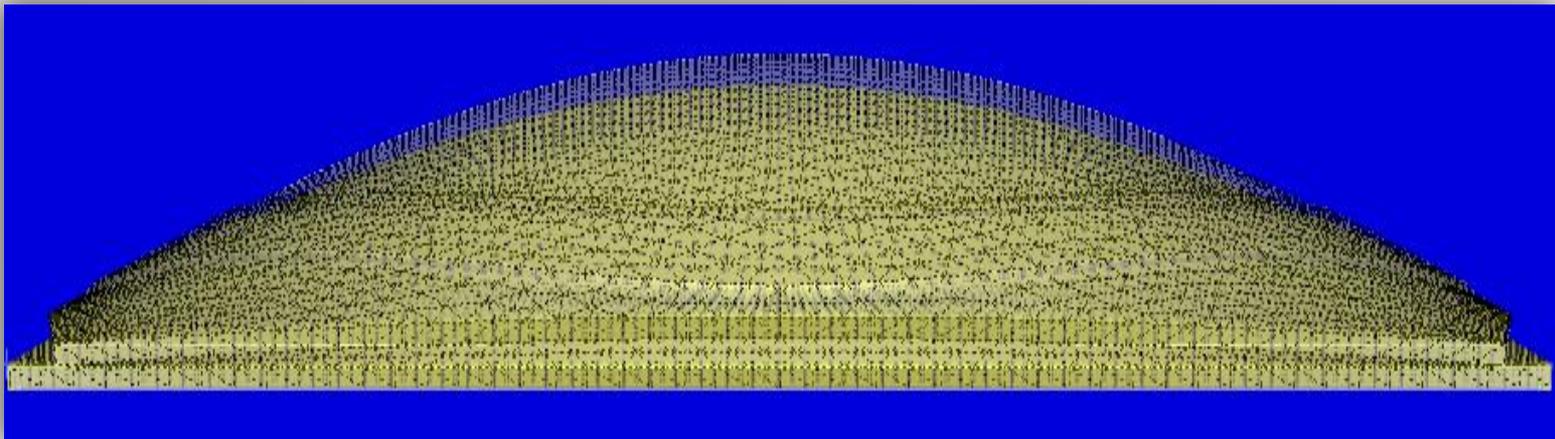
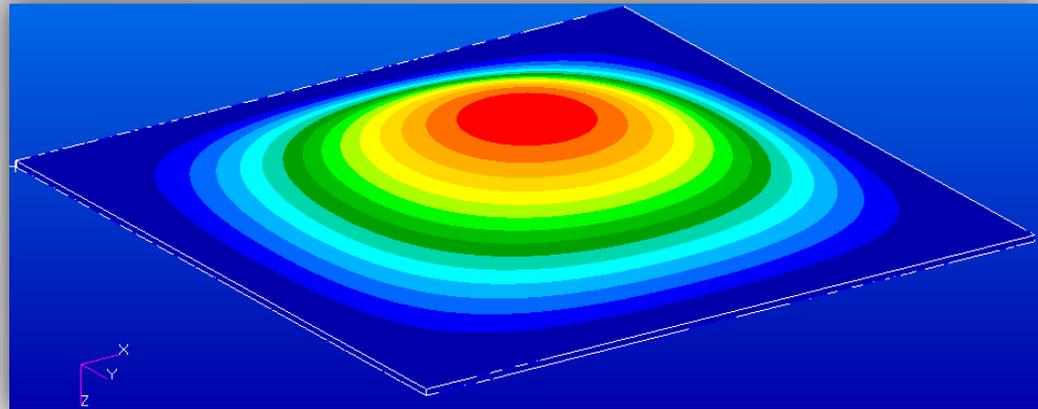
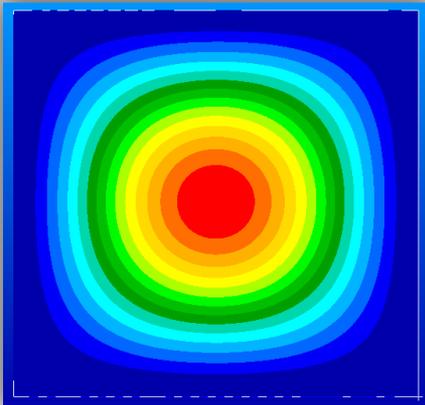
Prova statica, piastra
piana semplice.



Prova statica, piastra
Tipo2.

MODO 1

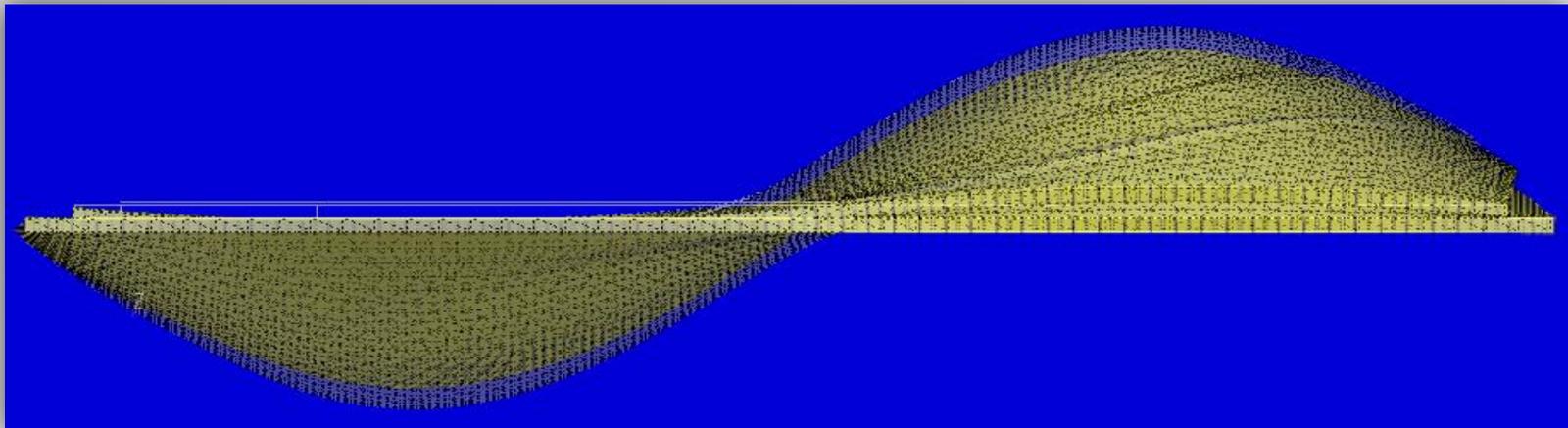
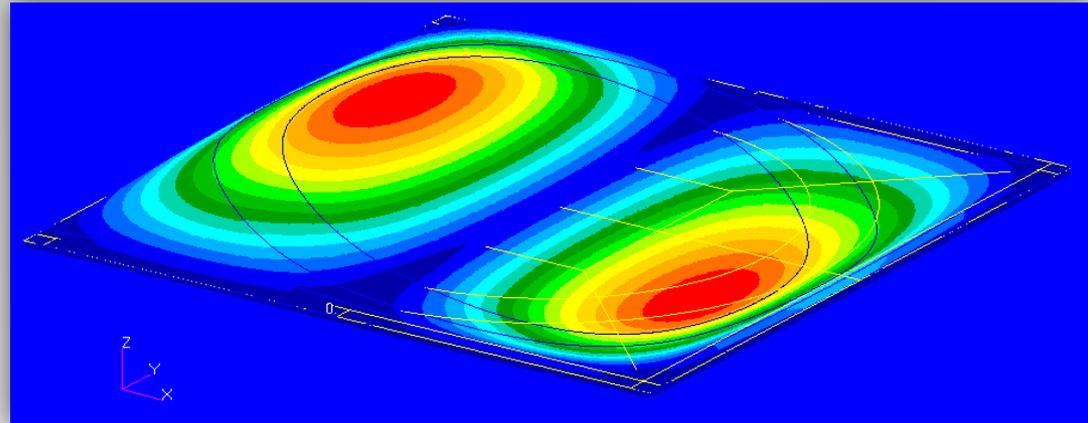
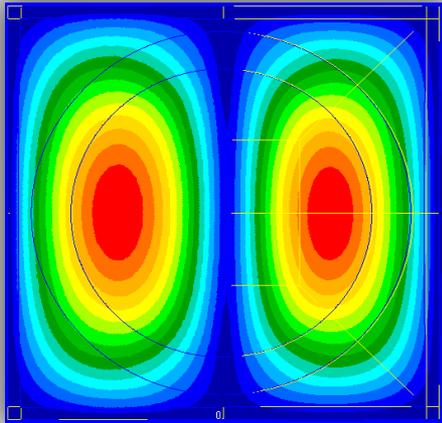
MODO	3D Tet10 [Hz]	3D Brick [Hz]
1	797.06	791.09



Sovrapposizione delle viste dei due modelli; 3D Brick: giallo; 3D Tet10: grigio

MODO 2-3

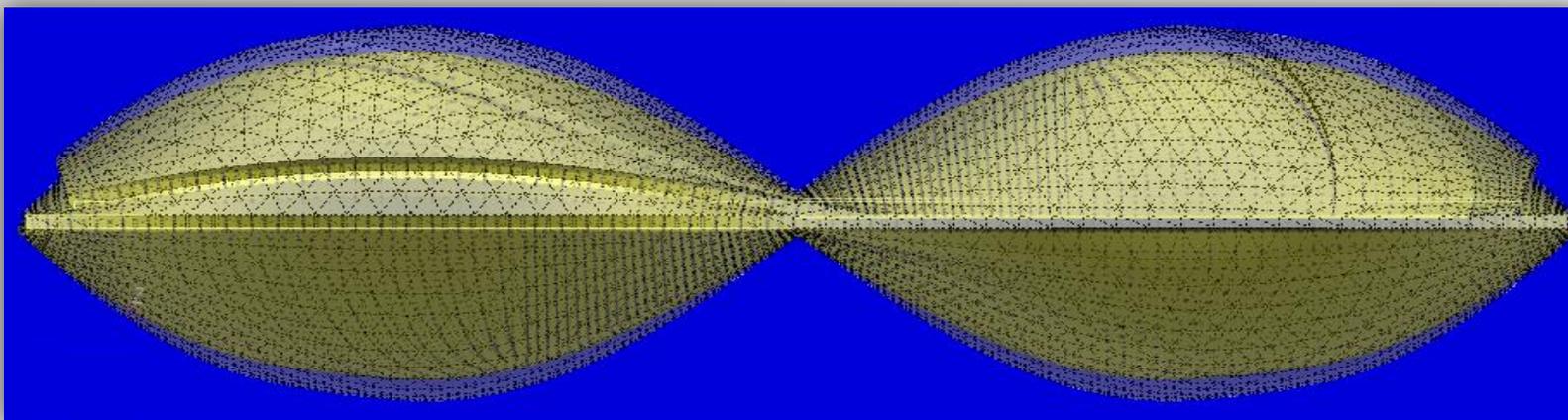
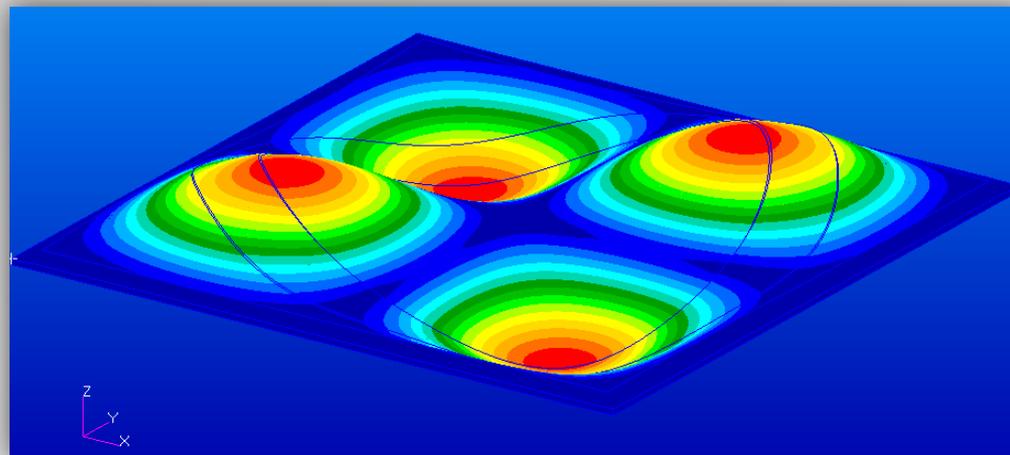
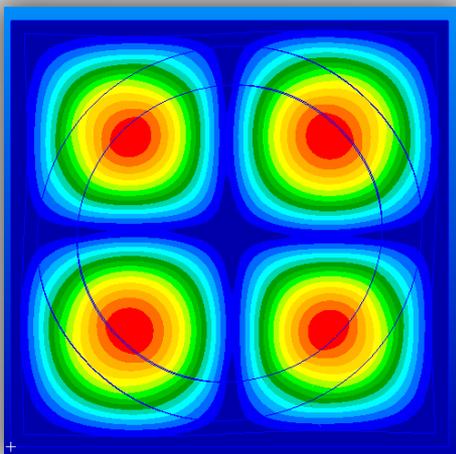
MODO	3D Tet10 [Hz]	3D Brick [Hz]
2	1517.5	1510.5



Sovrapposizione delle viste dei due modelli; 3D Brick: giallo; 3D Tet10: grigio

MODO 4

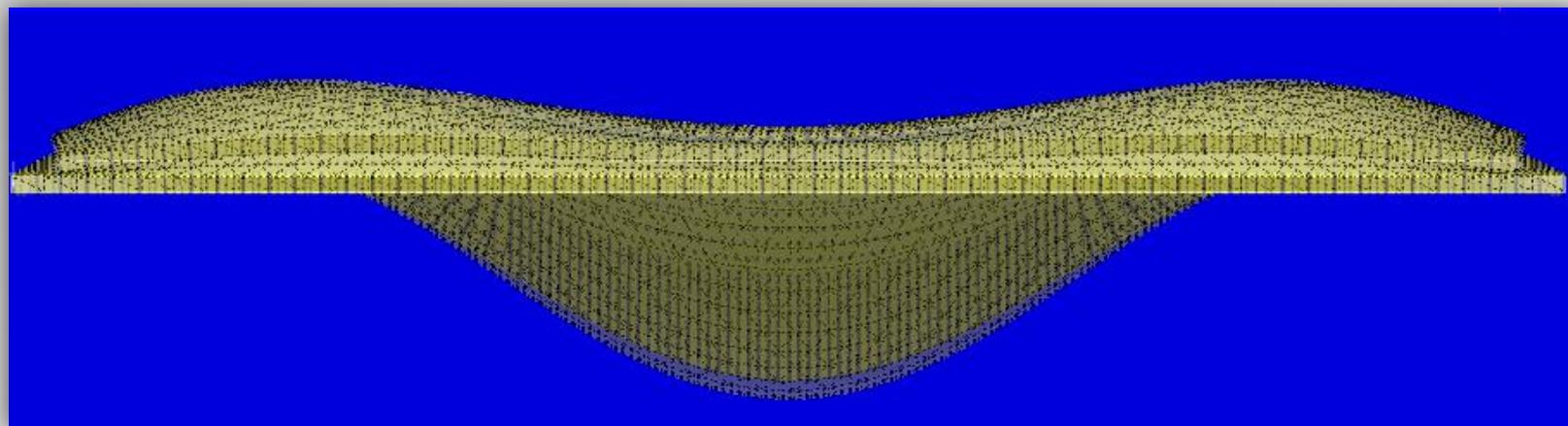
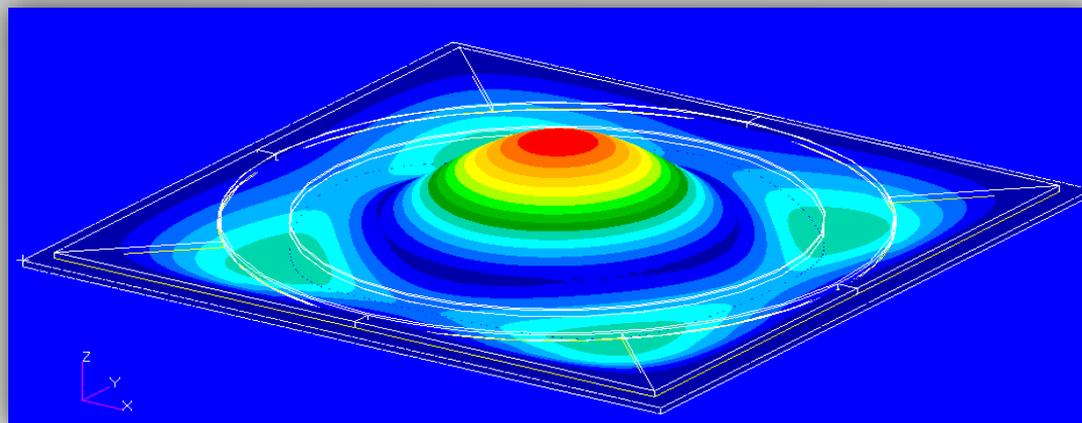
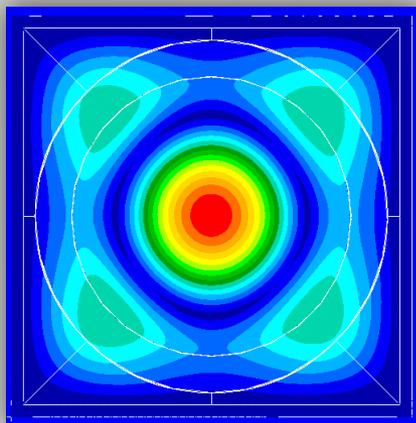
MODO	3D Tet10 [Hz]	3D Brick [Hz]
4	2232.1	2223.9



Sovrapposizione delle viste dei due modelli; 3D Brick: giallo; 3D Tet10: grigio

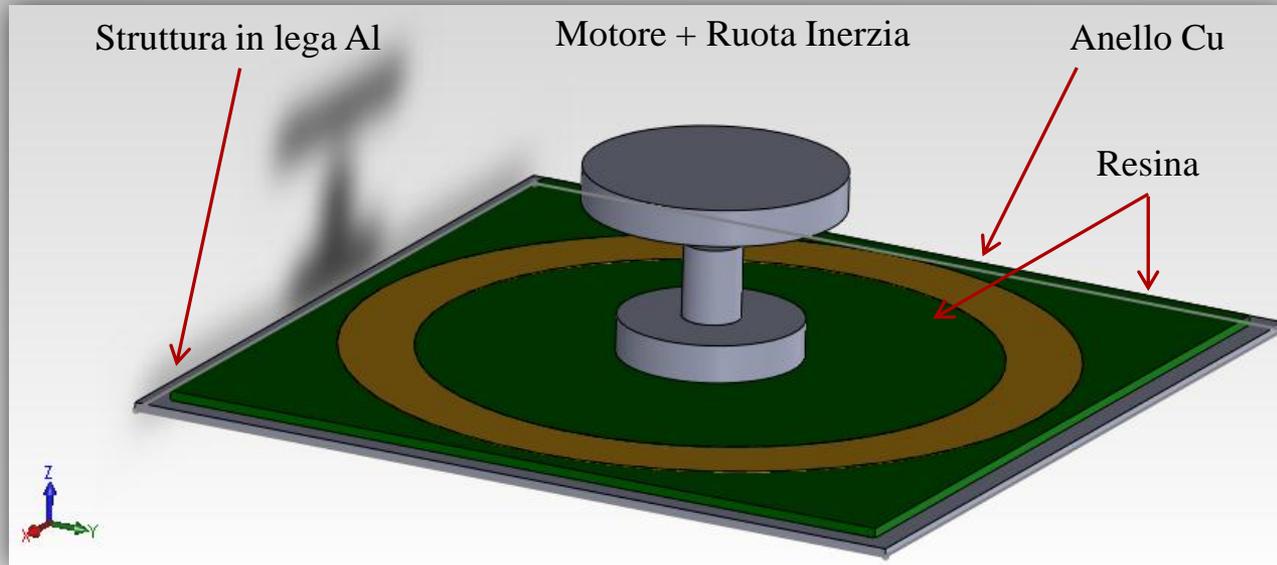
MODO 5

MODO	3D Tet10 [Hz]	3D Brick [Hz]
5	2622.7	2615.3



Sovrapposizione delle viste dei due modelli; 3D Brick: giallo; 3D Tet10: grigio

Piastra Strumentata



- Effetto «distribuito» dovuto alla superficie di collegamento
- Effetto di inerzia dovuto allo sviluppo della massa in direzione normale al piano
- Vincolo sui gradi di libertà rotazionali dei nodi interessati

MODO	Tipo2	Massa 20g	Massa 40g	Massa 60g	Massa 80g	Massa 100g
1	466.36	408.61	355.96	319.18	291.72	270.26
2	1068.3	728.87	543.43	451.27	394.33	353.92
3	1068.3	729.83	543.91	451.74	394.9	354.32
4	1621.6	1774.5	1774.4	1774.4	1774.5	1774.5
5	2103.9	1931.8	1775.1	1696.7	1649	1618.8
6	2136.3	2393.9	2393.9	2393.9	2393.8	2393.8

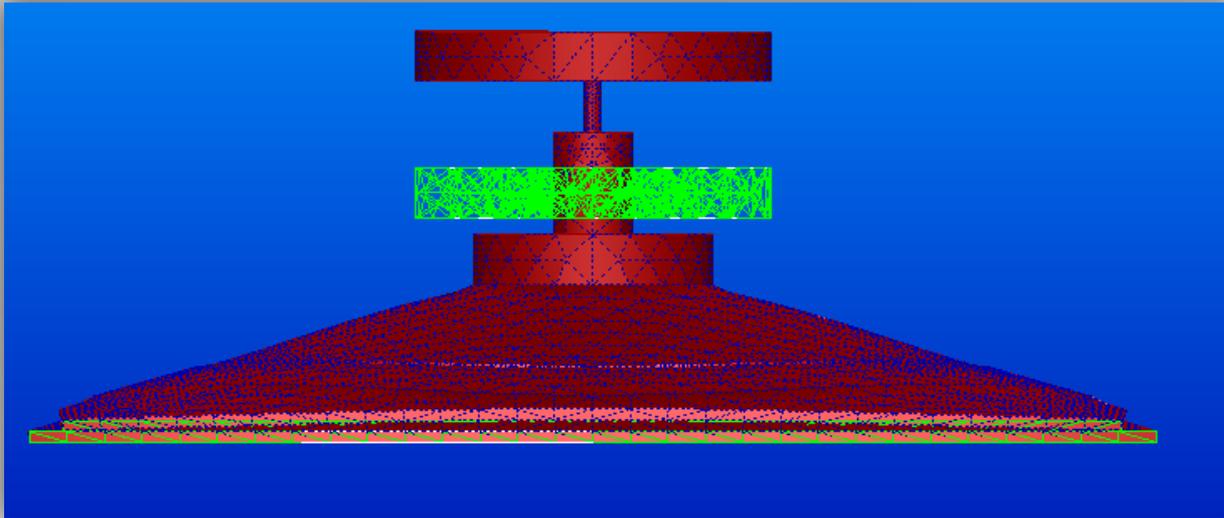
Confronto piastra Tipo2 e Tipo2 + Massa di entità variabile. Appoggio[Hz]

MODO	Tipo2	Massa 20g	Massa 40g	Massa 60g	Massa 80g	Massa 100g
1	797.06	708.17	596.59	522.28	470.72	431.84
2	1517.5	813.46	586.7	482.89	419.53	375.94
3	1518.5	818.26	589.95	485.16	421.45	377.62
4	2232.1	2572.8	2585.3	2580.6	2582.9	2582.7
5	2622.7	/	/	/	/	/
6	2800.3	3327	3326.8	3226.7	3329.8	3329.7

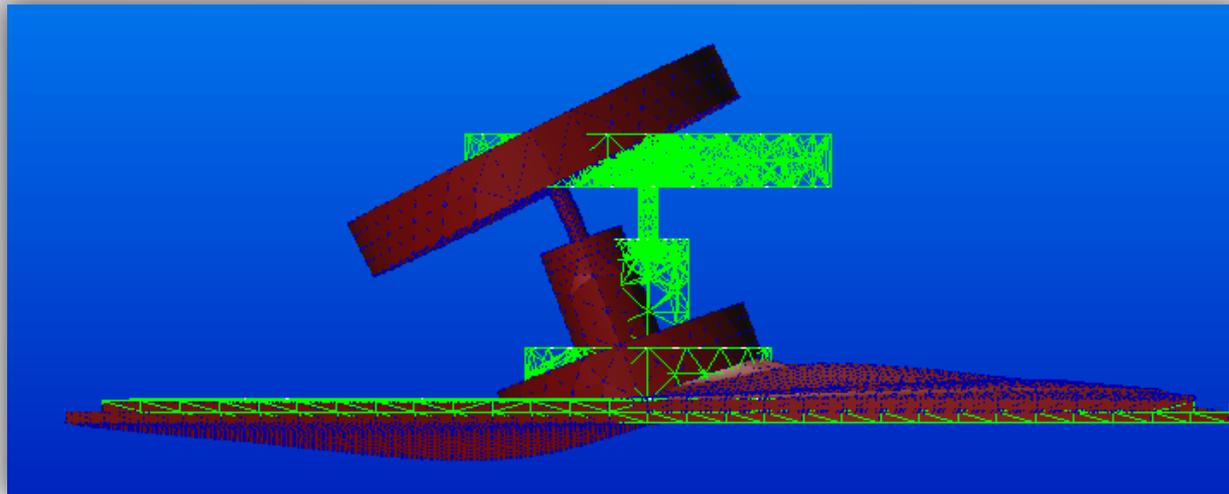
Confronto piastra Tipo2 e Tipo2 + Massa di entità variabile. Incastro[Hz]

- Influenza limitata sui modi che presentano deformazione al centro circa nulla (Modi 4-6)

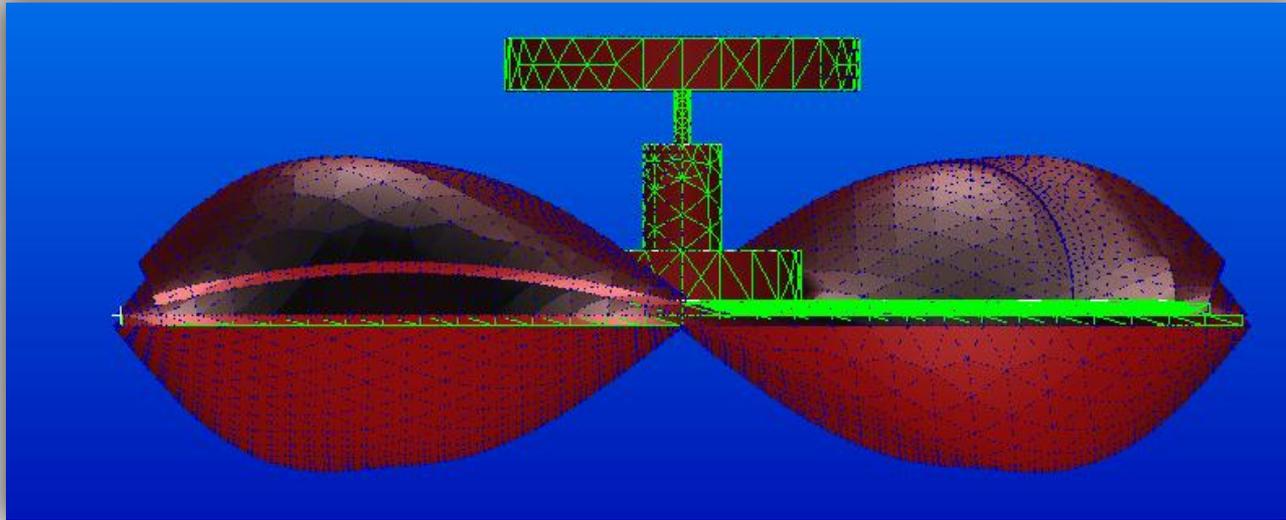
MODO 1 - Tipo2+Massa



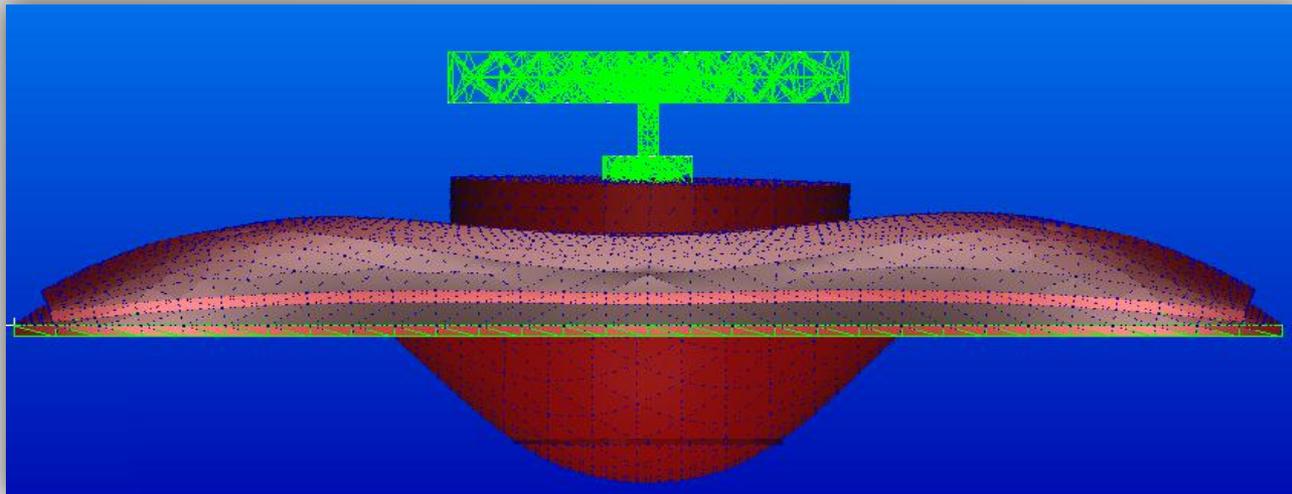
MODO 2 - 3 - Tipo2+Massa



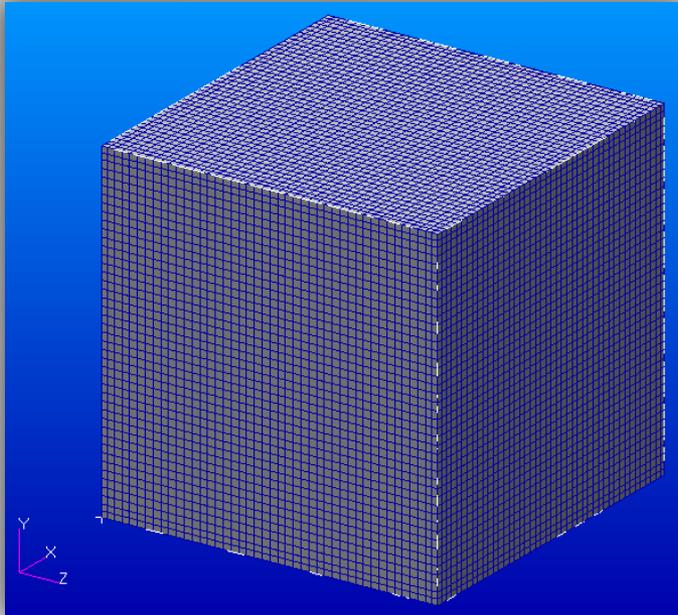
MODO 4 - Tipo2+Massa



MODO 5 - Tipo2+Massa



Applicazione ad una configurazione operativa



- 6 Piastre in lega Al, 50x50 elementi Thin Shell 2D
- 12 Rod in lega Al, 46 elementi CBAR a sezione quadrata (collegamento tramite *equivalence* ai nodi)
- Analisi modale in condizioni free-free

MODO	f Naturali [Hz]
1	483.72
2	569.68
3	648.83
4	1043.4
5	1108.1

Conclusioni

- Convergenza dei valori per mesh più fitta, risultati poco variabili oltre 40x40 EF
- Teoria di Kirchhoff insufficiente per buona precisione con piastre spesse
- Modello con masse concentrate efficace per diversi *aspect ratio*
- Convergenza fra risultati teorici-2D-3DTet-3D Hex, a patto di operare con mesh molto fitta
- Piastra con strato non-strutturale: freq. naturali incremento medio 45% c.a

Convergenza dei modelli: efficacia dell'*IW*

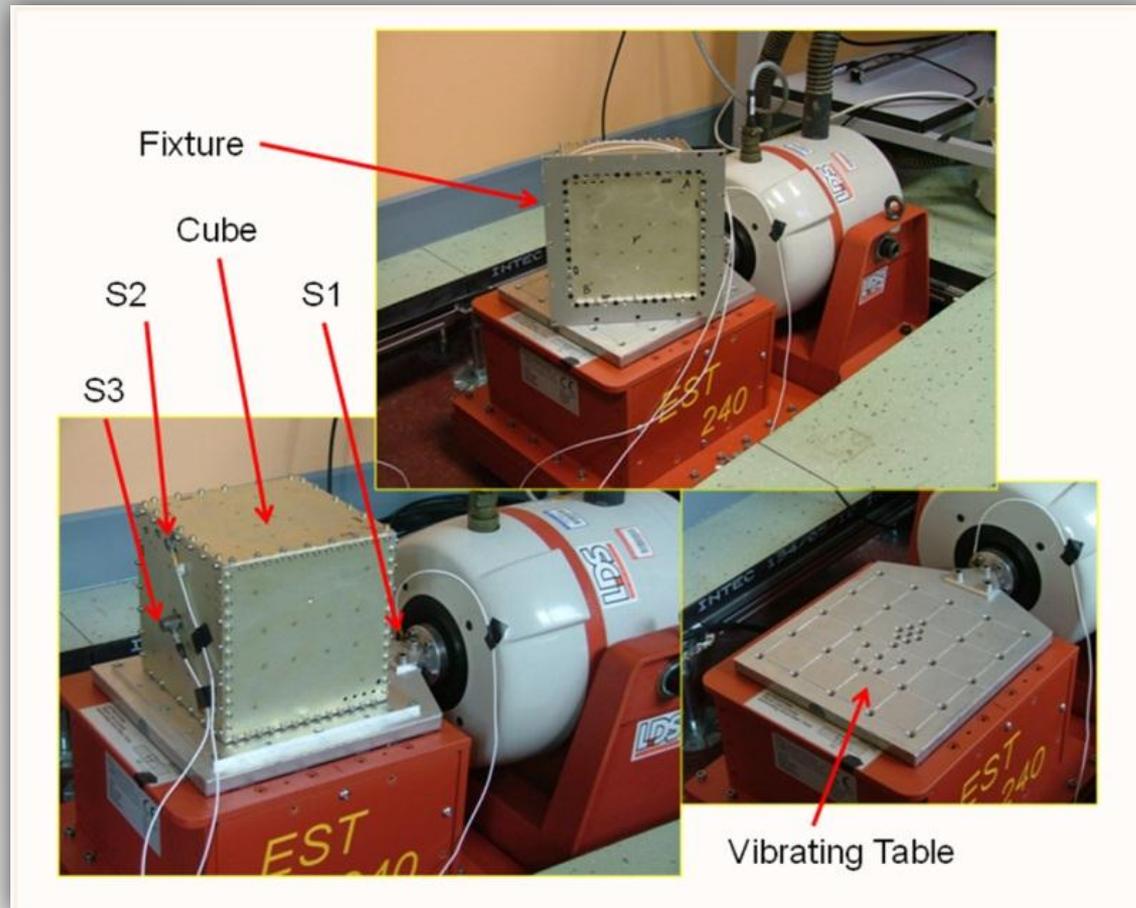
Variando le dimensioni non varia l'influenza della sovrastruttura

- Piastra con strumentazione:

Smorzamenti consistenti e crescenti linearmente con l'entità della massa

Eccezione per i modi con deformazione nulla nel centro

Confronto con dati disponibili da una prova di vibrazione effettuata con configurazione come da Figura



Principali elementi di criticità

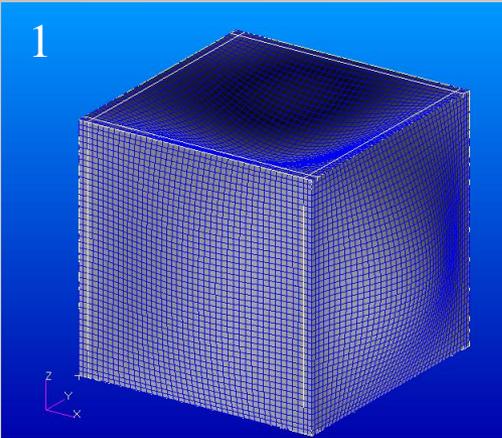
- Connessioni usate: *equivalence* ai nodi VS beared joints
- Elementi Beam (CBAR) posti ai bordi di congiunzione delle facce, senza considerare l'offset effettivo
- *Normal Modes*: fornisce il comportamento del sistema in dinamica autonoma, considerando il tipo di vincolo ma non eventuali carichi (fanno eccezione il peso della struttura o le masse ad essa vincolate).



Non tiene conto dello Structural Damping Coefficient, solitamente non trascurabile in caso di strutture costituite da più corpi a contatto.

- Imprecisione nella definizione dei materiali

1

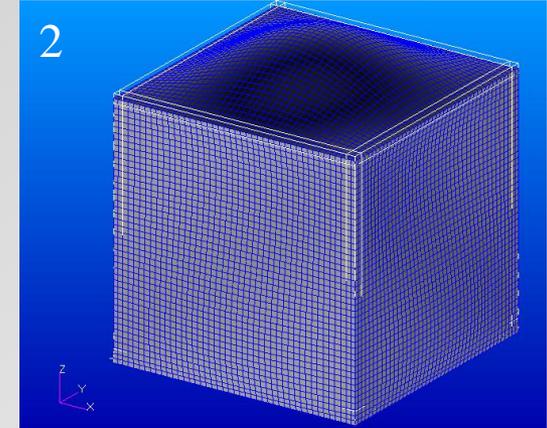


Confronto

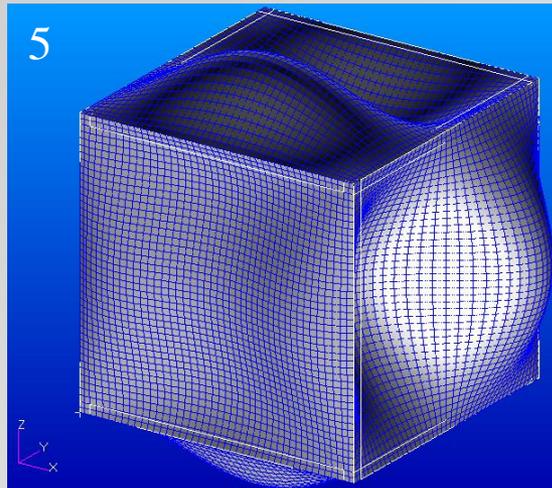
E deformate modali

MODO	Resonance Test [Hz]	FEM [Hz]	Scarto %
1	327.39	/	/
2	370.24	399.16	7.813
3	381.24	/	/
4	462.52	464.79	0.49
5	504.99	519.51	2.875
6	grafico	855.55	/
7	grafico	908.43	/

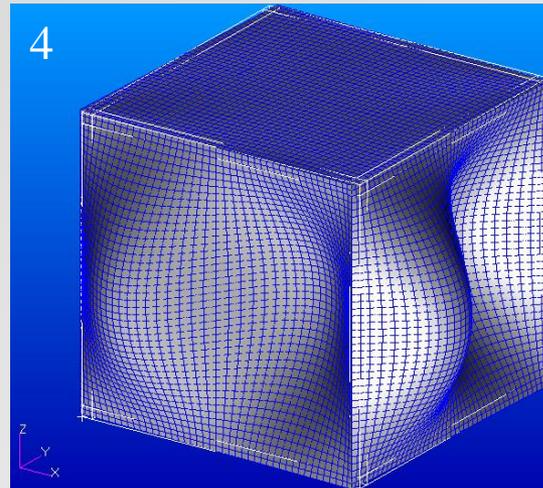
2



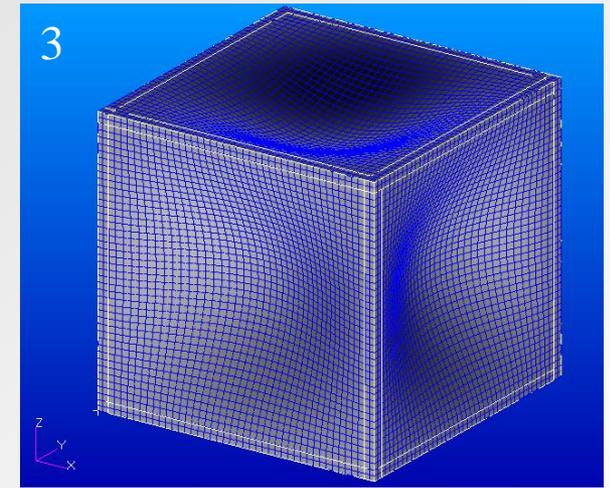
5



4



3



Vi ringrazio per la cortese attenzione