

Politecnico di Torino

I facoltà di Ingegneria

Corso di Laurea in Ingegneria Aerospaziale



Tesi di Laurea Triennale

Analisi termica e strutturale di una tile per satelliti modulari AraMiS

Relatori

Prof. Leonardo Reyneri

Prof. Paolo Maggiore

Candidato

Alberto Brandl

Ringraziamenti

I miei doverosi ringraziamenti spaziano all'interno di quello che è un insieme decisamente ampio di persone. Si comincia ovviamente dalla mia famiglia, sempre sostenitrice nel percorso e nelle scelte.

Ringrazio i miei relatori, il Prof. Reyneri ed il Prof. Maggiore per la disponibilità, la guida, il loro tempo, l'utile materiale di supporto che mi ha aiutato a districarmi nella scelta dei vari modelli e le possibilità fornitemi all'interno del Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni, mettendomi a contatto con vere misure in laboratorio e veri ricercatori. A loro si aggiunge il Prof. Vallan per i test in campana del vuoto.

Devo esprimere i miei doverosi ringraziamenti al dottorando Anwar Ali, il quale mi ha guidato negli esperimenti e con il quale ho potuto rapportarmi, impiegando il suo tempo prezioso e condividendo il suo lavoro.

Desidero inoltre ringraziare gli amici ed i colleghi, in particolare Stefano Dominici, che ha trasformato invisibili autovalori in tangibili deflessioni.

Ultima ma di certo non meno importante, ringrazio Fabiola... alla quale non v'è altro da aggiungere.

Alberto

Indice

Cap.1 Introduzione.....	3
Cap.2 Diversi standard per nanosatelliti.....	4
2.1 Finalità dei nanosatelliti.....	4
2.2 Lo standard CubeSat.....	4
2.3 Lo standard AraMiS.....	4
2.4 Le diverse tipologie di tile.....	6
Cap.3 Cenni di analisi termica per oggetti orbitanti.....	7
3.1 La radiazione solare.....	8
3.2 Albedo.....	8
3.3 Caratterizzazione degli indici di assorbanza.....	8
3.4 Radiazione di un corpo.....	9
3.5 Analisi termica del sistema ARAMIS.....	9
Cap.4 Teorie ed equazioni per la flessione di una piastra.....	12
4.1 Le equazioni differenziali di equilibrio.....	13
4.2 L'equazione del moto per la vibrazione trasversale della piastra.....	14
4.3 Le frequenze naturali di una piastra.....	15
4.4 Soluzione per coordinate rettangolari.....	16
4.5 Le condizioni al contorno per piastre incastrate.....	16
Cap.5 Difficoltà nello studio di strutture sandwich.....	18
Cap.6 Il metodo di approssimazione di Rayleigh-Ritz.....	20
6.1 Scelta delle funzioni di base.....	22
Piastra piana incastrata ai bordi.....	22
Piastra semplicemente appoggiata.....	24
6.2 Scrittura delle matrici di rigidezza e massa.....	26
Cap.7 Risultati numerici sulle vibrazioni della piastra.....	28
7.1 Confronto dei valori.....	29
Cap.8 Analisi modale del pannello sandwich.....	34
8.1 Grandezze equivalenti in un core di tipo honeycomb.....	35
8.2 Modello di piastra laminata.....	37
8.3 Relazione tra CPT e FSDT.....	38
Cap.9 Risultati numerici sulla piastra sandwich.....	41
Cap.10 Matrice di smorzamento.....	44
Cap.11 Funzioni MATLAB/OCTAVE per l'analisi modale.....	45
11.1 Calcolo delle funzioni di base.....	45
11.2 Calcolo numerico delle matrici R e B.....	46
11.3 Calcolo delle grandezze equivalenti per un core in honeycomb.....	48
11.4 Calcolo del tensore di rigidezza di un sandwich.....	49
11.5 Relazione CPT-FSDT.....	51
Cap.12 Analisi termica della tile tipo 1B8.....	52
12.1 Calcolo superficie di conduzione tra celle fotovoltaiche e piastra.....	53
12.2 Calcolo della resistenza termica tra il centro ed i bordi della tile.....	53
12.3 Resistenza termica tra due lati paralleli.....	54
12.4 Calcolo della resistenza termica tra la faccia interna ed esterna.....	56
12.5 Fra due Tile parallele in configurazione di minimo cubo.....	57
12.6 Calcolo dei differenziali di temperatura.....	57
Potenza termica raggiunta.....	57

Tra faccia interna ed esterna.....	57
Tra centro e bordi della tile.....	58
Fra due estremi paralleli.....	58
Fra due Tile parallele in configurazione di minimo cubo.....	58
Cap.13 Analisi termica di un pannello sandwich	60
13.1 Derivazione dei fattori di vista netti.....	60
13.2 Assunzioni per un sandwich con core modello honeycomb.....	62
13.3 Funzione analitica di trasferimento del calore.....	65
13.4 Effetto della geometria sull'effettiva conducibilità.....	66
13.5 Effetto della riflessione.....	67
13.6 Differenziale di temperatura attraverso il core.....	68
13.7 Differenziale di temperatura tra il centro ed i bordi.....	68
Cap.14 Funzioni MATLAB / OCTAVE per l'analisi termica.....	71
14.1 Calcolo della conducibilità effettiva attraverso un pannello sandwich.....	71
Cap.15 Test e risultati empirici.....	72
15.1 Test tramite simulatore solare.....	72
15.2 L'importanza della corretta posizione.....	72
15.3 Differenza tra valore teorico ed empirico ed accettabilità dei risultati.....	73
15.4 Misura dell'indice di emissività ed assorbanza in aria libera.....	74
15.5 Misura nel vuoto.....	75
Test su AraMiS_C1.....	77
Test su tile per AraMiS.....	78
15.6 Misure di resistenze termiche.....	78
Cap.16 Conclusioni.....	80
Cap.17 Bibliografia.....	81

Cap.1 Introduzione

Lo sviluppo di applicazioni spaziali comporta costi non indifferenti, sia da un punto di vista puramente economico sia dal lato progettuale. Inoltre si incontrano problemi particolari come quello dell'assenza di gravità che comportano evoluzioni particolari le quali vanno studiate appositamente caso per caso. La nascita di studi a costo ridotto come quello a cui si riferisce la seguente trattazione comporta necessariamente una spinta verso un approccio modulare al quale bene risponde l'architettura AraMiS.

Dopo una iniziale introduzione a quelle che sono le effettive applicazioni ed a quello a cui servono, vengono introdotti i termini necessari allo studio di analisi termica per satelliti. Dopodichè lo studio si divide in tre parti principali ovvero l'analisi strutturale e dunque le teorie che permettono lo studio delle autovibrazioni della tile in oggetto, importante punto di valutazione della struttura, l'analisi termica vera e propria ed infine gli esperimenti in laboratorio che ne caratterizzano e verificano i risultati.

Buona parte è dedicata alla modellizzazione di una particolare struttura che grazie alle sue proprietà in campo sia strutturale che termico viene sempre più utilizzata, in particolare in ambiente aerospaziale. Si tratta della struttura a sandwich in configurazione con core in honeycomb e ne verranno presentati diversi modelli equivalenti a seconda dello studio che dobbiamo fare. Ad esempio verrà omogeneizzato nel caso strutturale e semplificato nel caso termico. Di particolare importanza lo studio basato sui fattori di vista per la conduzione attraverso l'honeycomb che permette di considerare l'apporto dovuto all'irraggiamento.

I test effettuati nei laboratori di microelettronica del Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni del Politecnico di Torino, verranno messi a confronto con i valori teorizzati dando risultati decisamente concordanti con le misure verificando sia i calcoli che i modelli ipotizzati.

Cap.2 Diversi standard per nanosatelliti

2.1 Finalità dei nanosatelliti

Gli elevati costi relativi allo sviluppo di applicazioni spaziali ed il crescente interesse nei confronti dell'avionica spaziale da parte di università e SME (Small and Medium Enterprise, piccole e medie imprese) hanno portato alla nascita di piccole applicazioni spaziali dal costo ridotto. Esse sono classificate nella categoria dei nano o picosatelliti. Uno dei primi standard che venne creato nel 1999 dal Prof. Jordi Puig-Suari al California Polytechnic State University (Cal Poly) e Prof. Bob Twiggs della Stanford University's Space Systems Development Laboratory (SSDL) fu quello del CubeSat.

2.2 Lo standard CubeSat

La missione principale del CubeSat Program è di fornire accesso allo spazio a chiunque per piccoli payloads e la creazione di satelliti dal basso costo utilizzando componenti standard detti COTS (Commercial Off The Shelf). Questo standard per picosatelliti prevede una forma cubica con una lunghezza nominale di 100 mm per lato (l'altezza può arrivare fino a 113,5 mm) ed un peso massimo di 1,33 kg per un singolo CubeSat. Il materiale consigliato per la realizzazione della struttura principale del CubeSat e delle guide è Alluminio 7075 o 6061. Diverse altre specifiche vengono fornite sul file reperibile sul sito web principale del progetto [vedi 13].

2.3 Lo standard AraMiS

AraMiS, acronimo per architettura modulare per satelliti in italiano, va oltre il progetto CubeSat rendendo modulare la struttura, componendola di pochi diversi elementi, ai quali però non vengono posti limiti sull'evoluzione, se non quelli di rimanere compatibili con l'architettura stessa. L'idea principale è quella di sviluppare elementi intercomunicanti utilizzando componenti COTS, questo significa che la progettazione può avvenire singolarmente per i diversi elementi ed in tempi diversi, permettendo uno studio accurato volta per volta senza dover rivedere l'intera struttura ed incrementando la tolleranza ai guasti e mantenendo i costi a livelli accettabili. Poiché ognuno di questi moduli viene utilizzato in più satelliti e poiché diversi satelliti necessitano diversi moduli di base per svolgere la missione, l'architettura AraMiS permette di distribuire il costo su più missioni.

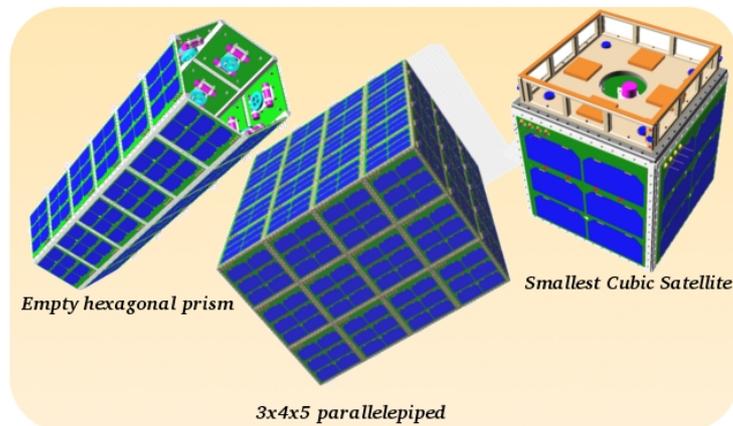


Fig 2.1: Esempi di diverse configurazioni possibili

In figura possiamo notare come la progettazione di pochi elementi possa dare diversi risultati semplicemente componendo tra di loro i componenti base dell'architettura.

A destra vediamo il caso più semplice dove viene utilizzato un solo modulo per faccia. Al centro si può vedere come si possono comporre i moduli per creare satelliti di dimensioni maggiori. L'ultimo caso a sinistra invece si diversifica dagli altri due prevedendo una configurazione di tipo prisma a base esagonale. In questo frangente sarà necessario utilizzare un nuovo componente strutturale per mantenere la rigidità della struttura.

Distinguiamo quindi i due componenti principali:

- la "tile": la sua duplice funzione di struttura e supporto per il payload ed i sistemi la rendono il modulo principale dell'architettura
- il "rod": elemento di connessioni tra le diverse tile

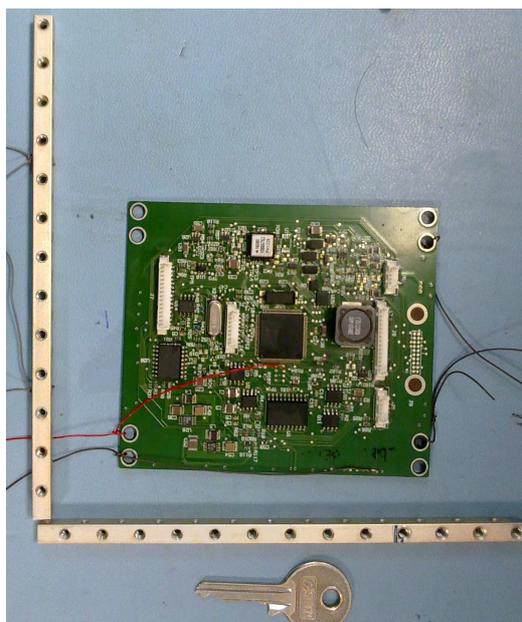


Fig 2.2: CubeSat e AraMiS a confronto

2.4 Le diverse tipologie di tile

Distinguiamo tre diverse fondamentali tipologie di tile:

- Power Management Tile (tile tipo 1B8)
Il suo scopo è alloggiare le celle fotovoltaiche, i convertitori di energia, gli accumulatori (batterie), il controllo di assetto (attuatori e sensori magnetici, attuatori inerziali e sensori giroscopici) ed un sensore solare. È costituita da un pannello in alluminio da 1.6 mm rivestito di un adesivo termoconduttore che utilizziamo per farci aderire le celle solari e le schede elettroniche. Contenendo l'attuatore per il controllo di assetto (Attitude Control System o ACS) ogni tile di tipo 1B8 permette la stabilizzazione su un asse, montandole opportunamente si ottiene quindi la stabilizzazione sui 3 assi. Un numero appropriato di queste tile (a seconda dei requisiti energetici della missione) utilizzati nel nanosatellite di forma cubica o prismatica rappresenta un pre-assemblato sottosistema di gestione energetica e di controllo di assetto. Questo sistema è dunque realmente modulare ed è possibile replicarlo per le volte necessarie ad ottenere la potenza desiderata. Poiché lavorano in parallelo questa soluzione ridondante aiuta anche da un punto di vista di tolleranza ai guasti. Per esempio se inseriamo due differenti payload con differenti consumi energetici, quando tutte le tile di Power Management sono funzionanti possiamo alimentare entrambi i payload ma se alcuni dei moduli di generazione si guastano potremo comunque continuare ad alimentarne uno. Il sistema continuerebbe dunque a funzionare ma con performance ridotte.
- Telecommunication Tile
Il suo scopo è quello di contenere un doppio modulo per trasmissione e ricezione in half-duplex a 437 MHz e 2.4 GHz e relative antenne ed un processore. È costituita da una piastra di alluminio spessa 5 mm e viene utilizzata per il collegamento al lanciatore. Un secondo processore viene installato nella faccia interna della tile. Le antenne sono esterne e collegate su un supporto isolante.
- User-defined Payload
Destinata a qualsiasi applicazione, viene dimensionata per il suo specifico scopo. Prevede anche un foro al centro del diametro di 50 mm nel caso, ad esempio, vada installato un obiettivo.

Cap.3 Cenni di analisi termica per oggetti orbitanti

Per mantenere l'integrità dei sistemi per un periodo lungo come può essere quello di un satellite (si fa notare che nel caso di sistemi AraMis è prevista una media di vita di 5 anni) è fondamentale il controllo delle temperature e dei flussi termici che vengono continuamente generati e scambiati con l'ambiente esterno. Benchè l'intervallo di temperatura ammissibile per i componenti elettronici sia piuttosto ampio (vedi Tab. 1) si ricorda che le condizioni in orbita non permettono di considerare la convezione come possibile scambio termico. Inoltre la differenza di temperatura esistente tra il cosiddetto spazio freddo (5 K) e la quella raggiungibile da una superficie irradiata dal sole può divenire notevole.

Tabella 1: Intervalli di temperatura tollerati per componenti in applicazioni spaziali

Equipaggiamento elettronico (operativo)	Da -10 a + 40 °C
Batterie	Da -5 a +15 °
Carburante (es Hydrazine)	Da +9 a +40 °C
Microprocessori	Da -5 a +40 °C
Ingranaggi e organi meccanici	Da -45 a +65 °C
Celle fotovoltaiche	Da -60 a 55 °C
Diodi allo stato solido	Da -60 a +95 °C

Poichè dunque non è possibile affidarsi alla convezione è necessario distribuire forzatamente il calore, spostandolo dalle parti a temperatura più alta a quelle più basse. Diversi sono i metodi adottabili e l'architettura AraMis, considerando piccoli i calori in gioco, prevede che le cosiddette tile svolgano, oltre alle diverse funzioni strutturali e di supporto al payload ed ai vari sistemi, la funzione di distribuire per conduzione il calore. Esistono diversi metodi di scambio di energia termica utilizzati nelle applicazioni spaziali, i quali però si discostano dalla trattazione qui effettuata.

Gli elementi in gioco, nel caso di satelliti orbitanti intorno al pianeta Terra oltre una certa altitudine dove l'atmosfera può essere considerata rarefatta, sono

- la produzione interna di calore dovuta ai sistemi ed al payload
- la radiazione solare diretta
- la radiazione solare riflessa dai pianeti vicini detta *albedo* (nel caso specifico il pianeta Terra)
- il raffreddamento per irraggiamento verso lo spazio freddo
- la radiazione terrestre
- la conversione di energia solare in energia elettrica
- la capacità termica del sistema stesso

3.1 La radiazione solare

La radiazione solare si compone di tre parametri:

- la *distribuzione spettrale*, essa può essere considerata costante per il sistema solare e la distribuzione dell'energia si può approssimare ad una curva di Plank con una temperatura effettiva di 5800 K ovvero il grosso della radiazione solare è tra i 150 nm e i 10 μm con un massimo vicino ai 450 nm
- l'*intensità di radiazione solare* J_s , può essere espressa in funzione della potenza totale in uscita dal Sole indicata con P e la distanza D

$$J_s = \frac{P}{4\pi D^2} \text{ con } P = 3.8 * 10^{26} \text{ W} \quad (3.1)$$

- il *grado di collimazione*

Possiamo dunque scrivere il valore della cosiddetta "*costante solare*" ovvero dell'energia per unità di tempo e superficie che raggiunge il pianeta Terra, misurata su una superficie di riferimento esterna all'atmosfera e perpendicolare ai raggi solari. Questo valore è di 1367 W/m² e noi utilizzeremo questo valore per approssimare l'energia che viene fornita dal sole al nanosatellite.

3.2 Albedo

La radiazione che colpisce i pianeti viene in parte restituita da essi. Questa parte di radiazione solare indiretta viene detta albedo e quello relativo al pianeta Terra varia in funzione delle sue condizioni superficiali (nuvole, aree verdi..) ma può essere semplicemente espressa in funzione dell'intensità di radiazione solare J_s , di un valore medio "*a*" (per quanto riguarda la Terra pari a 0.367), e di un fattore di vista ricavabile da tabelle in base alla posizione.

$$J_a = J_s a F \text{ con } a = 0.367 \text{ (pianeta Terra)} \quad (3.2)$$

3.3 Caratterizzazione degli indici di assorbanza

Si definisce emissività di una superficie il rapporto tra la radiazione emessa dalla superficie e la radiazione emessa dal corpo nero alla stessa temperatura. L'emissività di una superficie si indica con ϵ , varia tra zero e uno ($0 \leq \epsilon \leq 1$) ed è una misura di quanto una superficie reale approssima un corpo nero per il quale $\epsilon = 1$.

La legge di Kirchhoff, basandosi sul primo principio della termodinamica, permette di affermare che in caso di equilibrio termico l'indice di assorbanza eguaglia l'indice di emissività.

Il coefficiente di emissività dipende non solo dal materiale e dalla lunghezza d'onda della radiazione (questa seconda dipendenza viene appianata dalla cosiddetta ipotesi del corpo grigio che prevede l'indipendenza del coefficiente dalla lunghezza d'onda) ma anche dalla qualità della superficie stessa. Ricordiamo infatti che una superficie levigata e liscia avrà sicuramente un indice di assorbanza (e quindi di emissività) minore.

Un metodo di misura per questo coefficiente di assorbanza consiste nell'utilizzo di un simulatore solare. Si tratta di uno strumento che produce una luce di intensità pari a quella solare, questo irraggiamento diretto sul corpo che intendiamo studiare ne fa aumentare la temperatura. Tramite un sensore se ne registra dunque l'aumento di temperatura. Quando il modulo arriva all'equilibrio termico il simulatore solare viene spento e si registra la differenza di temperatura prodotta dall'irraggiamento. Durante il passo successivo si riproduce la differenza di temperatura ma tramite la potenza dissipata dai circuiti all'interno. Ne risulta che

$$P_{solare} = P_{elettrica} \quad (3.3)$$

$$\alpha J_s S = VI \quad (3.4)$$

$$\alpha = \frac{VI}{J_s S} \quad (3.5)$$

Per la misura del coefficiente di emissività invece si può porre la scheda all'interno di una camera in cui viene creato il vuoto. Alimentando la scheda essa si scalderà fino a raggiungere una temperatura di equilibrio. Applicando dunque la (3) si ricava l'indice di emissività nel vuoto. Si riprenderanno questi argomenti nella sezione "Test e risultati empirici"

Si elencano alcuni valori di assorbanza ricavati in rete

Tabella 2: indici di assorbanza materiali	
Alluminio lucidato	0.05
Alluminio, superficie grezza	0.07
Alluminio molto ossidato	0.25
Silicio	0.92

3.4 Radiazione di un corpo

L'intensità di radiazione emessa da un corpo immerso nel vuoto è data dalla legge di Stefan-Boltzmann

$$F(T) = \sigma \alpha T^4 \quad (3.6)$$

dove σ è la costante di Stefan-Boltzmann, α l'assorbanza della superficie e T la sua temperatura assoluta

3.5 Analisi termica del sistema ARAMIS

Calcoliamo dunque componente per componente gli apporti di potenza termica per ogni caso indicando con S_i la superficie di ogni faccia. Nel calcolo di questi valori assumiamo un approccio

Cap.3 Cenni di analisi termica per oggetti orbitanti

conservativo.

La radiazione totale su ogni faccia, assumendo che l'incidenza sia la stessa sia per la radiazione terrestre che per quella solare e che essa sia quella che dà il massimo apporto di energia, sarà dunque data da

$$P_i^S = \alpha_i (F_s + F_T) S_i \quad (3.7)$$

Mentre la radiazione emessa da ogni faccia

$$P_i^E(T) = \sigma \alpha_i T^4 S_i \quad (3.8)$$

La radiazione proveniente dal pianeta Terra. Per calcolarlo poniamo alcune assunzioni:

- il pianeta si comporta come un corpo nero in accordo con la legge di Stefan-Boltzmann (temperatura della superficie terrestre circa 287 K)
- l'albedo sia di 0.367 e dunque il valore di assorbanza ed emissività vale $1-0.367 = 0.633$
- l'intensità di radiazione ad una certa altitudine h si riduce di un fattore di

$$\left(\frac{R}{R+h} \right)^2 \quad (3.9)$$

dove R è il raggio della Terra. Si assuma h pari a 800 km

- le facce ricevono tutta l'energia termica irradiata dalla Terra mentre le superfici laterali vengono considerate come se fossero parallele alla superficie terrestre ma ricevono energia solo da metà della superficie, considerandone l'altra metà schermata dal satellite stesso
- il lato più distante dalla Terra non riceve energia

Usiamo dunque queste assunzioni per calcolare la superficie totale interagente con la radiazione terrestre. Essa verrà considerata come la somma delle superfici di fronte alla Terra e della metà delle superfici laterali.

Si ottiene dunque questa formula per il calcolo della potenza termica proveniente dalla Terra, dove α_T e T_T sono rispettivamente l'indice di assorbanza e la temperatura della superficie terrestre mentre i pedici "aff" e "lat" indicano i valori relativi rispettivamente alle facce frontali e laterali rispetto alla superficie terrestre.

$$P^T = \sigma \alpha_T T_T^2 \left(\frac{R}{R+h} \right)^2 \left(\alpha_{aff} S_{aff} + \alpha_{lat} \frac{S_{lat}}{2} \right) = F_E \left(\alpha_{aff} S_{aff} + \alpha_{lat} \frac{S_{lat}}{2} \right) \quad (3.10)$$

Con

$$F_E = \sigma \alpha_T T_T^4 \left(\frac{R}{R+h} \right)^2 = 185 W/m^2 \quad (3.11)$$

Cap.3 Cenni di analisi termica per oggetti orbitanti

La conversione in energia elettrica e il suo accumulo può essere calcolata come (stesse assunzioni dell'incidenza riguardo alla radiazione solare)

$$P_i^P = \gamma_i (F_S + F_T) S_i \quad (3.12)$$

L'accumulo dovuto alla capacità termica del sistema con massa m e capacità termica c costanti

$$P^C(t) = \frac{d}{dt}(mcT) = mc \frac{d}{dt}T \quad (3.13)$$

Eventuale generazione interna di calore (dovuta ai circuiti elettronici escludendo i pannelli fotovoltaici già considerati) P^J

Scriviamo l'equazione dunque per l'equilibrio termico

$$\sum_{illuminata} (P_i^S - P_i^P) - \sum_{tuttelefacce} (P_i^E(T)) + P^J + P^T - P^C(t) = 0 \quad (3.14)$$

Cap.4 Teorie ed equazioni per la flessione di una piastra

Lo studio del comportamento dinamico delle piastre parte dalla loro definizione matematica. La piastra è dunque un elemento strutturale piano il cui spessore risulta piccolo rispetto alle dimensioni planari della stessa.

Lo studio di piastre riguarda una innumerevole quantità di teorie, la cui principale distinzione si basa sul comportamento lungo la normale al piano medio della piastra. Sono in figura rispettivamente rappresentate la teoria classica (in letteratura indicata anche come CPT Classical Plate Theory), la cosiddetta teoria al primo ordine (FSDT First Shear Deformation Plate Theory) e quella al terzo (TSDT Third Shear Deformation Theory).

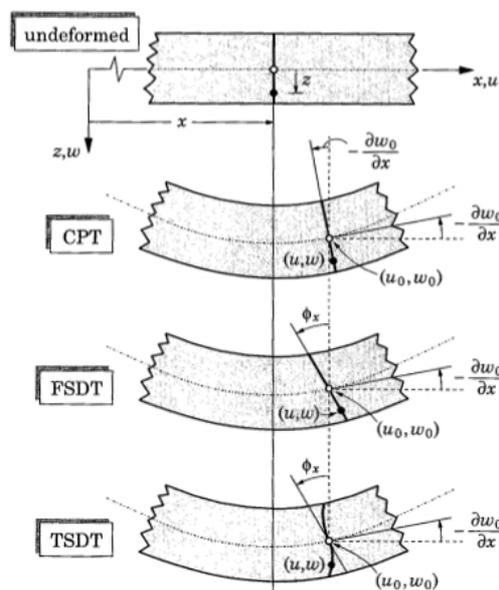


Fig 4.1: Differenza tra le teorie sulle piastre

Le due principali teorie che permettono un'approssimazione accettabile nel calcolo delle deformazioni e degli sforzi in una piastra sono quella di Poisson-Kirchhoff detta anche Teoria Elastica Lineare e quella di Mindlin-Reissner. La prima rientra nella Teoria Classica delle Piastre o CPT (Classic Plate Theory) alla quale applichiamo appunto le condizioni di Kirchhoff. La seconda invece è una teoria al primo ordine.

Le basi della teoria di Kirchhoff si possono distinguere tra quelle applicate al *materiale costituente*:

1. il materiale di cui è formata la piastra è perfettamente elastico
2. il materiale segue la legge di Hooke ed ha le medesime costanti elastiche (modulo di elasticità, coefficiente di Poisson) per tutti i tipi di carico
3. il materiale della piastra è omogeneo ed isotropo
4. lo spessore della piastra è costante
5. lo spessore è piccolo rispetto alle altre dimensioni della piastra

e quelle applicate alla *piastra sotto carico*:

6. le fibre che risultano perpendicolari al piano della piastra prima che si manifesti la flessione, rimangono perpendicolari al piano medio della piastra deformata dopo che la flessione è avvenuta
7. la tensione normale al piano della piastra è trascurabile
8. gli spostamenti trasversali della piastra sono piccoli, tali da poter esprimere la curvatura in ogni punto come derivata seconda dello spostamento trasversale in quella direzione
9. nel piano della piastra non agiscono deformazioni normali, ovvero non nascono deformazioni nel piano medio
10. il peso proprio della piastra è incluso nel carico a cui la piastra è soggetta

4.1 Le equazioni differenziali di equilibrio

Considereremo inizialmente le risultanti delle tensioni ovvero le cosiddette azioni interne. Una volta scritte le equazioni di equilibrio, esse saranno generali e potremo applicarle sia al caso della piastra piana che al caso della tile in honeycomb.

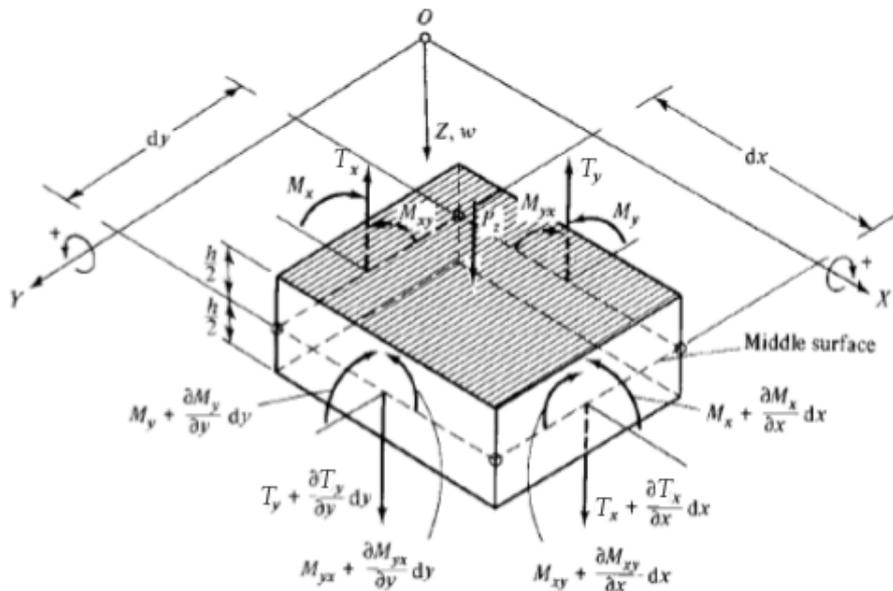


Fig 4.2: Equilibrio tridimensionale di un elemento di piastra

Da cui ricaviamo per semplice equilibrio le equazioni

$$\frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - T_y = 0 \quad (4.1)$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - T_x = 0 \quad (4.2)$$

$$\frac{\partial T_x}{\partial x} + \frac{\partial T_y}{\partial y} + q = 0 \quad (4.3)$$

4.2 L'equazione del moto per la vibrazione trasversale della piastra

Dalla teoria dell'elasticità ricaviamo le definizioni corrette per i momenti M_x , M_y ed M_{xy} e le dilatazioni ε_x e ε_y i cui momenti risultano funzione. Questi risultati sostituiti alle (1), (2) danno

$$M_x = \int_{\frac{h}{2}}^{-\frac{h}{2}} \frac{E}{(1-\nu^2)} (\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y) z dz \quad (4.4)$$

$$M_y = \int_{\frac{h}{2}}^{-\frac{h}{2}} \frac{E}{(1-\nu^2)} (\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x) z dz \quad (4.5)$$

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (4.6)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (4.7)$$

Esplicitando dalle (1) e (2) le espressioni di T_x e T_y

$$T_x = \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} \quad (4.8)$$

$$T_y = \frac{\partial M_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} \quad (4.9)$$

Imponiamo dunque le condizioni di Kirchhoff per portarci alla CPT o meglio imponiamo che le fibre perpendicolari al piano medio prima del moto rimangano tali anche dopo la deformazione. Ovvero le dilatazioni risultano solo in funzione della derivata seconda dello spostamento trasversale e della coordinata z così che possa essere considerata una semplice rotazione rigida.

$$\varepsilon_x = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (4.10)$$

$$\varepsilon_y = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (4.11)$$

Sostituendo quindi le espressioni delle dilatazioni nelle definizioni dei momenti, possiamo ricavare i tagli in funzione solo della coordinata trasversale z . Poste nell'equazione di equilibrio alla

traslazione lungo l'asse z e definita la grandezza D in questo modo:

$$D = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)} \quad (4.12)$$

otteniamo la cosiddetta equazione del moto per la vibrazione trasversale della piastra per cui sono valide le ipotesi di Kirchhoff.

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} - \frac{q}{D} = 0 \quad (4.13)$$

4.3 Le frequenze naturali di una piastra

La determinazione delle frequenze naturali alle quali oscilla una piastra è alla base dello studio dinamico del sistema. Consideriamo dunque inizialmente come carico applicato quello proprio della piastra. Esso è definito su una superficie infinitesima pari alla massa contenuta in un elementino $dx \times dy$ per l'accelerazione trasversale di questo elemento

$$q = \bar{m} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad \text{con } \bar{m} = \rho h \quad (4.14)$$

Il comportamento dinamico sarà dato da una combinazione lineare dei cosiddetti modi di oscillazione. Ad ogni modo di oscillazione corrisponderà una pulsazione naturale. I seguenti grafici indicano i primi 4 modi di oscillazione di una piastra incastrata lungo i bordi.

I modi di oscillazione si indicano tramite due numeri a pedice (m e n) che indicano il numero di semionde lungo le coordinate x e y .

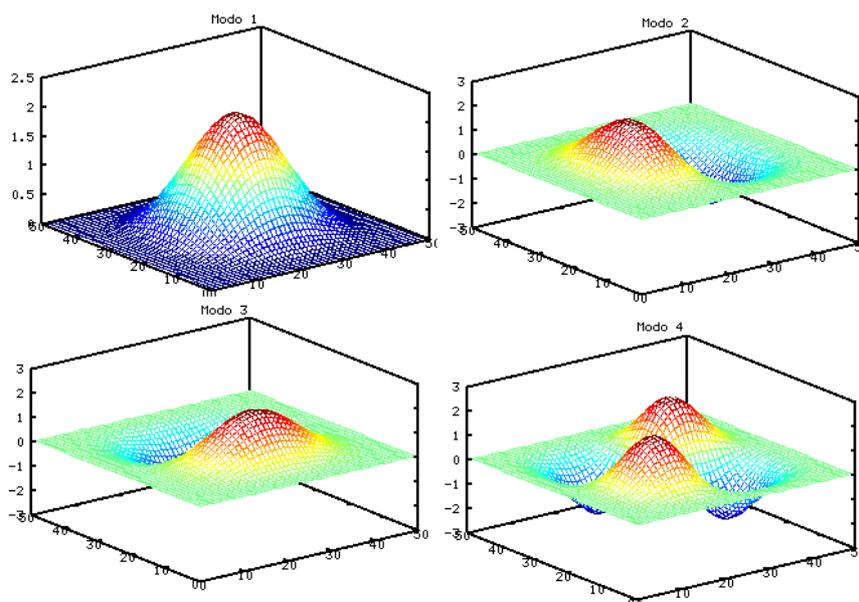


Fig 4.3: Primi 4 modi di oscillazione di una piastra incastrata ai bordi

4.4 Soluzione per coordinate rettangolari

Per ottenere delle soluzioni corrette a partire dalle approssimazioni imposte occorre fare un piccolo ragionamento matematico. Scritta l'equazione del moto in maniera compatta

$$D\nabla^4 w + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \text{ dove } \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (4.15)$$

Essa avrà per vibrazioni libere con frequenza naturale ω (indicata sul Chakraverty anche come *circular frequency*) soluzioni di questo tipo (in coordinate cartesiane)

$$w(x, y, t) = W(x, y)e^{i\omega t} \quad (4.16)$$

Introducendo la variabile β la (15) diventa

$$\beta^4 = \frac{\rho h \omega^2}{D} \Rightarrow (\nabla^4 - \beta^4)W = 0 \quad (4.17)$$

$$\Rightarrow (\nabla^2 + \beta^2)(\nabla^2 - \beta^2)W = 0 \Rightarrow (\nabla^2 + \beta^2)(\nabla^2 + (i\beta)^2)W = 0$$

Possiamo dunque, in virtù della linearità del problema, scomporre la grandezza W come somma di W_1 e W_2 le quali a loro volta saranno date dal prodotto di una funzione dipendente solamente dalla coordinata x ed una solo da y .

(4.18)

Cominciando da W_1 (i risultati per W_2 sono analoghi) e ponendola come prodotto di una funzione in x ed una in y

$$W_1(x, y) = X_1(x)Y_1(y) \quad (4.19)$$

Dopo alcuni passaggi si arriverà alla seguente conclusione

$$W = f(A, B, C, D, E, F, G, H) \quad (4.20)$$

dove A, B, C, D, E, F, G, H dipenderanno dalle condizioni al contorno.

4.5 Le condizioni al contorno per piastre incastrate

Analizziamo solo il caso di nostro interesse, dove la piastra risulta avvitata lungo tutto il contorno alla struttura. Diremo quindi che i bordi sono incastrati e che sarà nullo ogni spostamento lungo ogni lato della piastra così come la rotazione.

Lungo $x = 0$ e $x = a$ le condizioni sono

$$W = 0; \quad \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0 \quad (4.21)$$

Cap.4 Teorie ed equazioni per la flessione di una piastra

Lungo $y = 0$ e $y = b$ analogamente

$$W = 0; \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0 \quad (4.22)$$

Si noti che nel caso della teoria CPT l'annullamento della rotazione al contorno corrisponde all'annullarsi della derivata prima dello spostamento. Così non è con le teorie FSDT dove la rotazione non è funzione solo dello spostamento trasversale.

Sul LEISSA viene riportata un'utile formula chiusa che permette di valutare le pulsazioni di vibrazione per una piastra quadrata di lato pari ad a dai bordi incastrati per i modi di vibrazione con $m = n$ conoscendo unicamente la rigidezza flessionale e la densità della piastra.

$$\omega_{mm} = 2 \left(m + \frac{1}{3} \right)^2 \frac{\pi^2}{a^2} \sqrt{\frac{D}{\rho}} \quad (4.23)$$

Questa formula verrà utilizzata per il confronto dei risultati. Esiste anche un'espansione di questa formula ricavata da Galin che permette di fare calcoli su piastre rettangolari e non quadrate ma non viene qui considerata.

Cap.5 Difficoltà nello studio di strutture sandwich

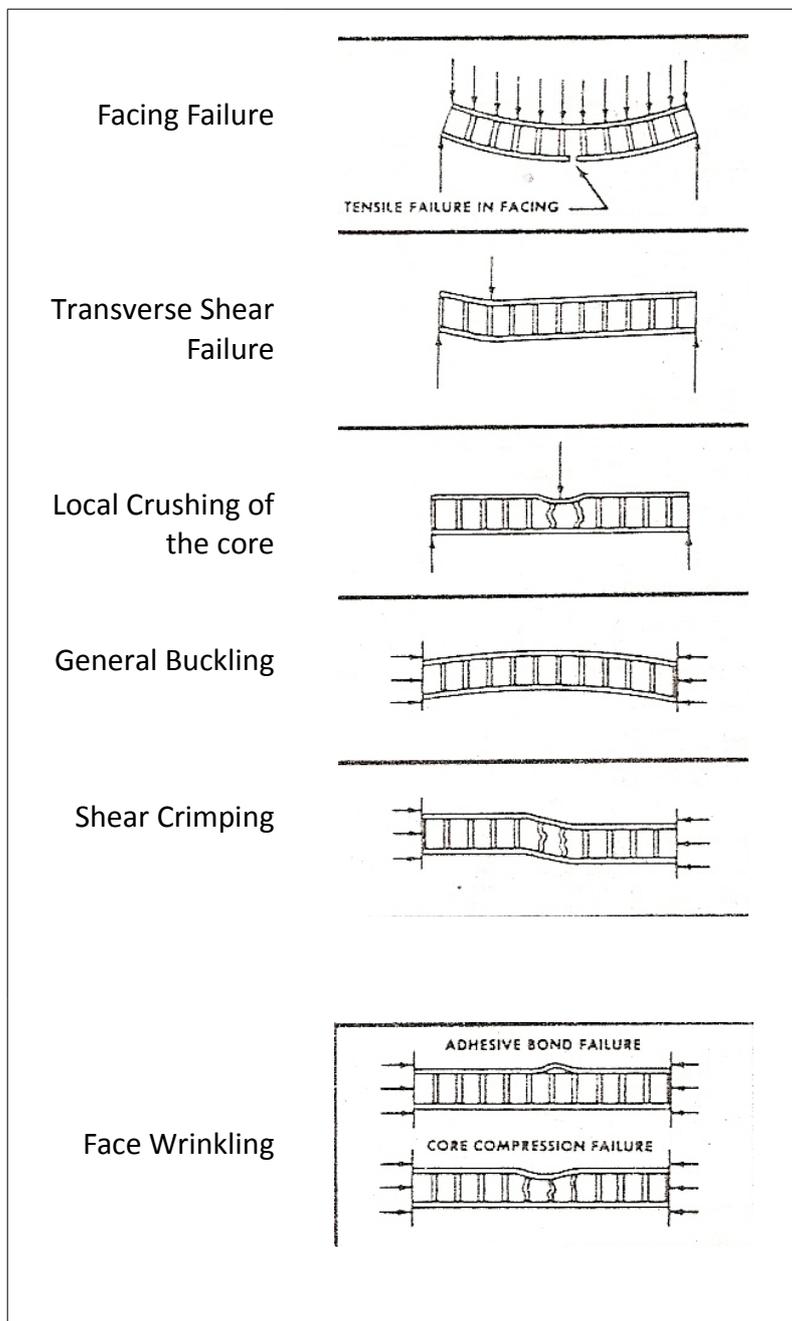


Tabella 1: Possibili instabilità delle strutture in HB

Il tipo più semplice di sandwich consiste di due sottili, rigidi e robusti fogli di materiale separati da uno spesso strato di materiale di bassa densità che può, invece, essere meno rigido e robusto. Secondo Howard G. Allen in "Analysis and design of structural sandwich panels" si può usare una semplice regola per una primissima valutazione in cui un sandwich efficiente si ottiene quando il peso del nucleo (da qui in avanti denominato core) è circa uguale a quello delle facce combinate.

Il core assolve diverse funzioni:

1. deve essere abbastanza rigido lungo la direzione perpendicolare alle facce da assicurare che esse rimangano alla giusta distanza
2. deve essere abbastanza resistente al taglio per assicurare che quando il pannello è flesso le facce non scorrino tra di loro
NOTA se questa caratteristica non è rispettata, le facce si comporteranno semplicemente come due pannelli indipendenti e separati, in tal caso si perderebbe ogni vantaggio del pannello sandwich
3. deve essere abbastanza rigido per mantenere le facce il più possibile piane, altrimenti una faccia potrebbe localmente cedere (fenomeno di *wrinkling*) sotto l'influenza di stress di compressione nel piano

Si aggiunge a questi tre requisiti la necessità che l'adesivo strutturale che mantiene facce e core insieme non sia abbastanza flessibile da permettere moti relativi tra le facce e il core. Inoltre un solito espediente aggiuntivo per minimizzare i calcoli è quello di ignorare l'apporto dovuto al core nella rigidezza in quanto trascurabile.

Esistono diversi tipi di pannellature sandwich, ma la divisione primaria è quella basata sulla configurazione del core, il quale può essere costituito in diversi modi. Tralasciando schiume e materiali a bassa densità, possiamo considerare quelle tipologie che in letteratura inglese prevedono addirittura due diversi termini ovvero corrugated core e honeycomb core. Il primo prevede un foglio incollato alternativamente alla faccia superiore ed inferiore. Il tipico esempio di tutti i giorni è, appunto, il cartone corrugato. Notiamo per questa configurazione una caratteristica particolare, ovvero il diverso comportamento a flessione se impressa in una direzione piuttosto che in un'altra.

Il caso di honeycomb core, o nucleo a nido d'ape, prevede invece la divisione in celle del nucleo con pareti continue lungo la direzione perpendicolare al piano medio della piastra. Diverse sono le soluzioni che si possono trovare in letteratura ma realizzazione e caratterizzazione specifica si discostano dall'argomento qui trattato. Ciò che qui conta davvero è il calcolo delle caratteristiche della piastra così costituita e dei problemi a cui si va incontro se si decide di utilizzare questo tipo di struttura.

Citando Howard G. Allen le soluzioni più comuni da trovare sono relative a pannelli incernierati ai bordi. Analisi relative ad altre condizioni ai bordi (come nel nostro caso dove il pannello risulta avvitato e quindi incastrato) sono meno trattabili a causa della difficoltà di trovare funzioni di deflessione adatte.

Cap.6 Il metodo di approssimazione di Rayleigh-Ritz

Come si è visto nei paragrafi precedenti, il calcolo delle cosiddette “soluzioni esatte” dell'equazione del moto per la vibrazione trasversale si complica notevolmente non appena le condizioni al contorno non sono più semplicemente degli appoggi. Questo vale, come si è visto, sia per la piastra piana le cui equazioni di governo sono state studiate nel paragrafo 4, che per le piastre di sandwich, dove oltre al problema relativo al puro calcolo delle vibrazioni si affianca il problema del modellizzare correttamente il comportamento stesso della particolare struttura.

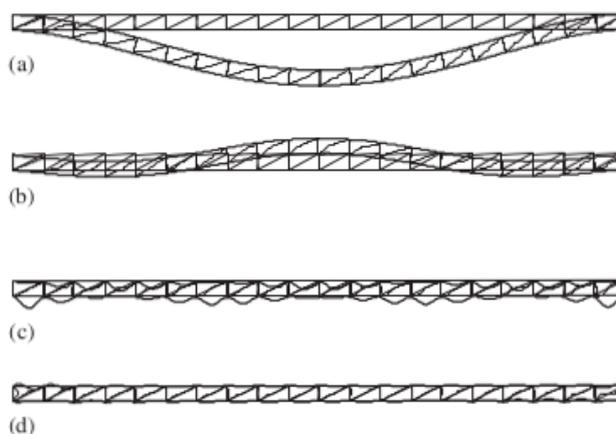


Fig 6.1: Esempio di deformazione di una trave sandwich con core modello square per frequenze (a) 80 Hz, (b) 370 Hz, (c) 2400 Hz e (d) 3700 Hz.

L'immagine, tratta dal “Vibration and sound radiation of sandwich beams with honeycomb truss core” [6], anche se il core non rientra nella configurazione trattata in quanto si tratta di un corrugato, indica molto bene come possa complicarsi ulteriormente la situazione durante le vibrazioni per una struttura di questo genere. La nascita di fenomeni di instabilità locale (wrinkling) ed il diverso comportamento alla flessione portano alla necessità di definire correttamente una funzione che ne indichi la deformazione, senza cascare, come già detto, in eccessive complicazioni.

Esistono quindi svariati metodi che ne approssimano le soluzioni [2] tra i quali si può scegliere tenendo conto dell'approssimazione richiesta. Diventa infatti importante considerare la necessità di fermarsi per evitare inutili complicazioni [3].

Uno dei suddetti metodi è appunto quello di Rayleigh-Ritz, il quale si basa su una combinazione lineare delle funzioni che indicano la deformazione assunta dalla struttura in vibrazioni armoniche libere. Queste funzioni dovranno soddisfare semplicemente le condizioni cinematiche al contorno della struttura imposte dalla teoria di riferimento scelta.

I valori che renderà questo metodo corrisponderanno a dei limiti superiori delle pulsazioni e daranno risultati sempre più accurati in funzione di quanto approfondita verrà condotta l'analisi. Facciamo dunque qualche anticipazione per meglio chiarire il concetto:

Cap.6 Il metodo di approssimazione di Rayleigh-Ritz

La piastra sottile può essere studiata tramite la teoria di Kirchhoff, mentre la piastra in configurazione honeycomb deve necessariamente utilizzare una teoria che consideri lo sforzo di taglio come quella di Mindlin. In entrambi i casi si tratta di incastri e le condizioni cinematiche coincidono, ma le due diverse teorie prevedono conseguenze differenti che vedremo più avanti.

Si tratta dunque di scrivere la seguente approssimazione

$$w(x, y) \simeq \sum_{j=1}^N c_j \phi_j(x, y) \quad (6.1)$$

Essa esprime che la deflessione della piastra è esprimibile come combinazione lineare di un certo numero di funzioni di base ognuna moltiplicate per il proprio coefficiente. Una volta sostituita all'interno dell'equazione del moto trasversale della piastra ottenendo così

$$([R] - \omega^2[B]) \{c\} = \{0\} \quad (6.2)$$

dove [R] e [B] sono le cosiddette matrici di rigidità e di massa. Grazie alla geometria rettangolare è inoltre possibile indicare le funzioni di base come prodotto di due funzioni, una per la variabile x e l'altra per la variabile y.

$$\phi_{ij} = X_i(x)Y_j(y) \quad (6.3)$$

Sappiamo che w (funzione di deflessione della struttura, in funzione della posizione e del tempo)

$$w = W(x, y)\cos(\omega t) \quad (6.4)$$

Citando il Chakraverty [2] possiamo scrivere l'espressione della massima energia cinetica T_{max} e della massima energia potenziale U_{max} come

$$T_{max} = \frac{1}{2}\omega^2 \iint_R \rho h W^2 dx dy \quad (6.5)$$

$$U_{max} = \frac{1}{2} \iint_R D \left[(\nabla^2 W)^2 + 2(1 - \nu) (W_{xy}^2 - W_{xx}W_{yy}) \right] dx dy \quad (6.6)$$

Se non c'è dissipazione queste due grandezze dovranno eguagliarsi e si può scrivere il cosiddetto coefficiente di Rayleigh come

$$\omega^2 = \lambda = \frac{\iint_R D \left[(\nabla^2 W)^2 + 2(1 - \nu) (W_{xy}^2 - W_{xx}W_{yy}) \right] dx dy}{\iint_R \rho h W^2 dx dy} \quad (6.7)$$

Le pulsazioni naturali sono quindi determinate minimizzando il coefficiente utilizzando le corrette espressioni per W che soddisfino le prescritte condizioni al contorno del sistema.

Assumiamo dunque una soluzione approssimata introducendo alcune costanti incognite. Il coefficiente di Rayleigh viene dunque estremizzato ad una funzione di queste costanti. Questo porta ad un sistema di equazioni omogenee lineari.

Uguagliando a zero il determinante della matrice dei coefficienti, otteniamo un'equazione polinomiale nel *frequency parameter* (che sarà legato alla pulsazione da una relazione quadratica). L'insieme associato delle incognite per una data pulsazione darà il modo per quella pulsazione. Variando il numero dei termini nell'approssimazione, si può costruire una sequenza di soluzioni con la speranza che esse convergeranno alla soluzione corretta.

6.1 Scelta delle funzioni di base

La scelta delle funzioni di base consiste dunque nello scrivere delle funzioni di deflessione che, secondo quello che viene richiesto dal metodo di Rayleigh-Ritz, rispettino le funzioni al contorno. Da esse si ricaveranno tramite il metodo matematico di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt altre funzioni a loro ortogonali, in modo da rendere diagonalizzabile il sistema.

Piastra piana incastrata ai bordi

Dobbiamo scrivere delle funzioni che rispettino l'incastro. Un buon modo di scegliere queste funzioni è

$$X_i(x) = \left(\frac{x}{a}\right)^{i+1} - 2\left(\frac{x}{a}\right)^{i+2} + \left(\frac{x}{a}\right)^{i+3} \quad (6.8)$$

$$Y_i(y) = \left(\frac{y}{b}\right)^{i+1} - 2\left(\frac{y}{b}\right)^{i+2} + \left(\frac{y}{b}\right)^{i+3} \quad (6.9)$$

Tramite questa scrittura possiamo ricavare il numero di funzioni di base che ci servono semplicemente incrementando i al valore necessario. Esse risulteranno tra loro ortogonali e renderanno quindi il problema diagonale. In questo modo si ottengono i seguenti polinomi in X (in Y saranno congruenti).

$$X_1 = \left(\frac{x}{a}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{a}\right)^3 + \left(\frac{x}{a}\right)^4 \quad (6.10)$$

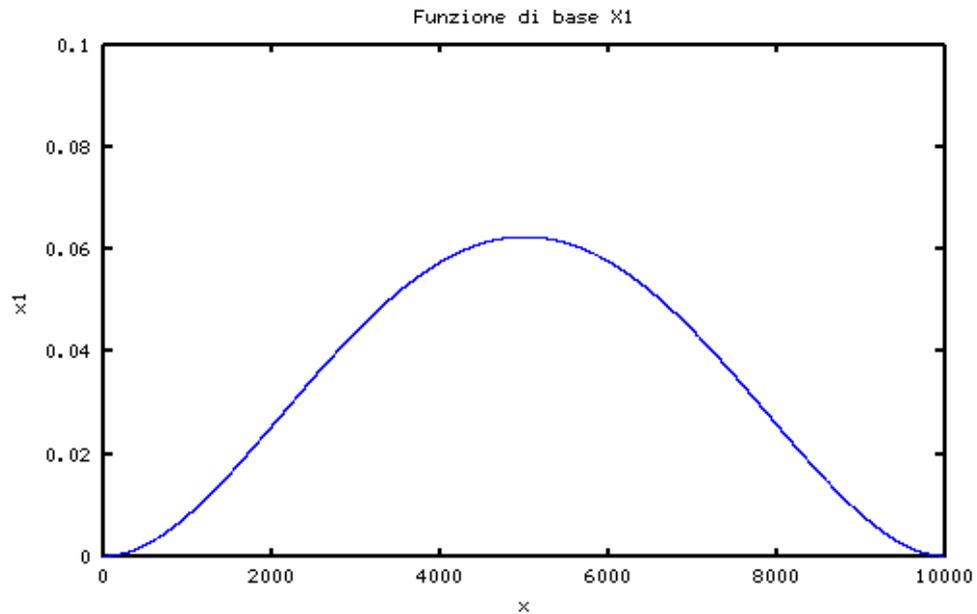


Fig 6.2: Prima funzione di base per piastra incastrata

$$X_2 = \left(\frac{x}{a}\right)^3 - 2\left(\frac{x}{a}\right)^4 + \left(\frac{x}{a}\right)^5 \quad (6.11)$$

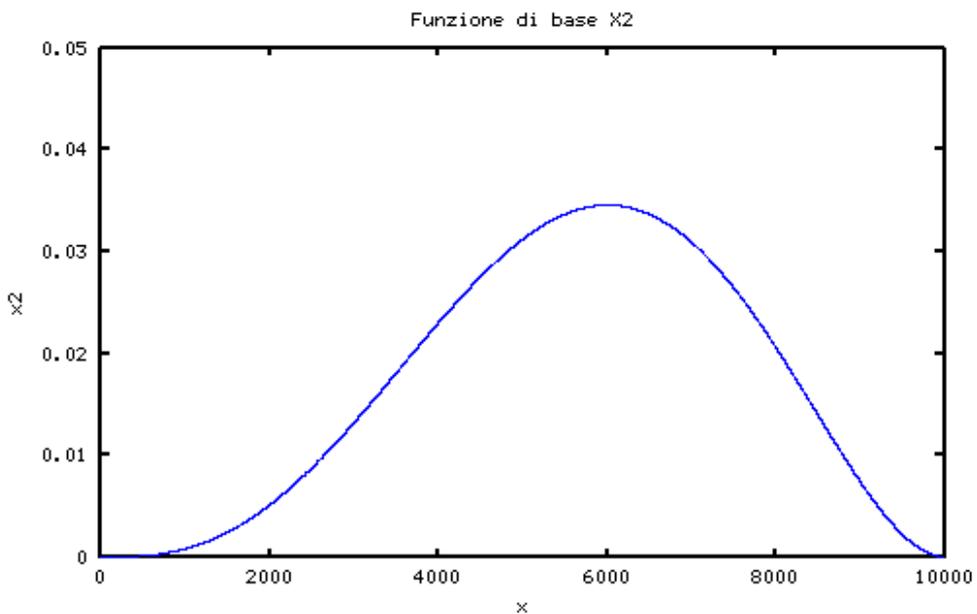


Fig 6.3: Seconda funzione di base per piastra incastrata

$$X_3 = \left(\frac{x}{a}\right)^4 - 2\left(\frac{x}{a}\right)^5 + \left(\frac{x}{a}\right)^6 \quad (6.12)$$

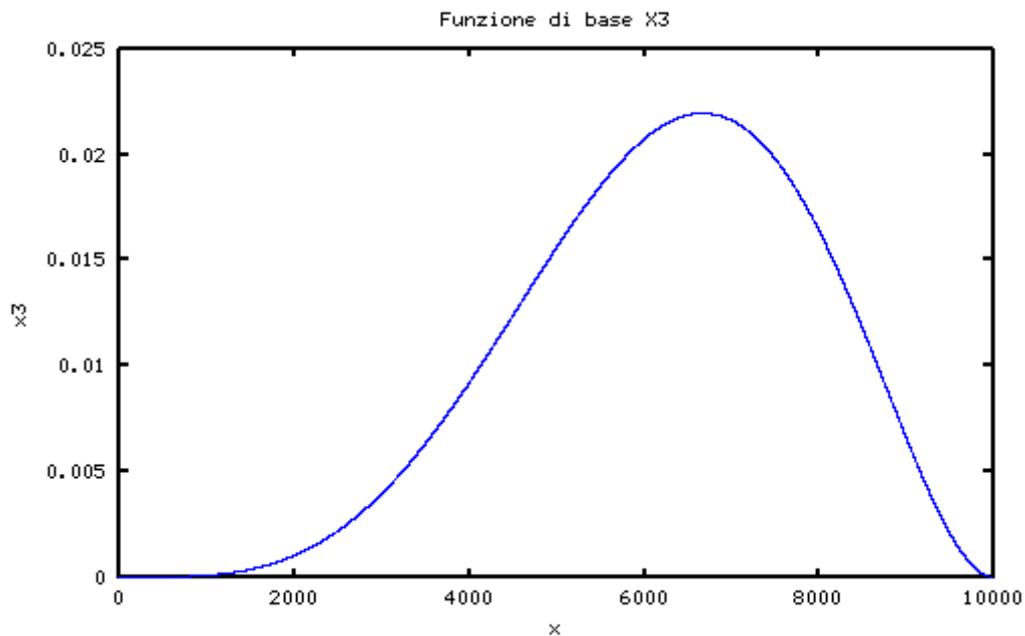


Fig 6.4: Terza funzione di base per piastra incastrata

Piastra semplicemente appoggiata

Dobbiamo scrivere delle funzioni che rispettino l'annullamento della freccia lungo il perimetro. Un buon modo di scegliere queste funzioni è

$$X_i(x) = \left(\frac{x}{a}\right)^i - \left(\frac{x}{a}\right)^{i+1} \quad (6.13)$$

$$Y_i(y) = \left(\frac{y}{b}\right)^i - \left(\frac{y}{b}\right)^{i+1} \quad (6.14)$$

Esattamente come prima si ricavano le funzioni di base in X (in Y saranno congruenti).

$$X_1 = \left(\frac{x}{a}\right) - \left(\frac{x}{a}\right)^2 \quad (6.15)$$

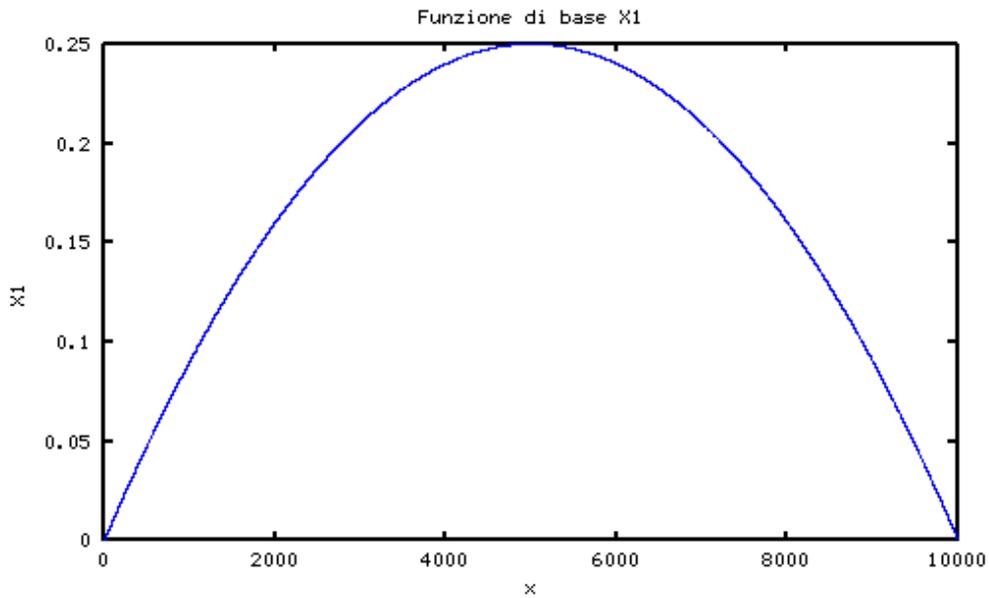


Fig 6.5: Prima funzione di base per la piastra appoggiata

$$X_2 = \left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{x}{a}\right)^3 \tag{6.16}$$

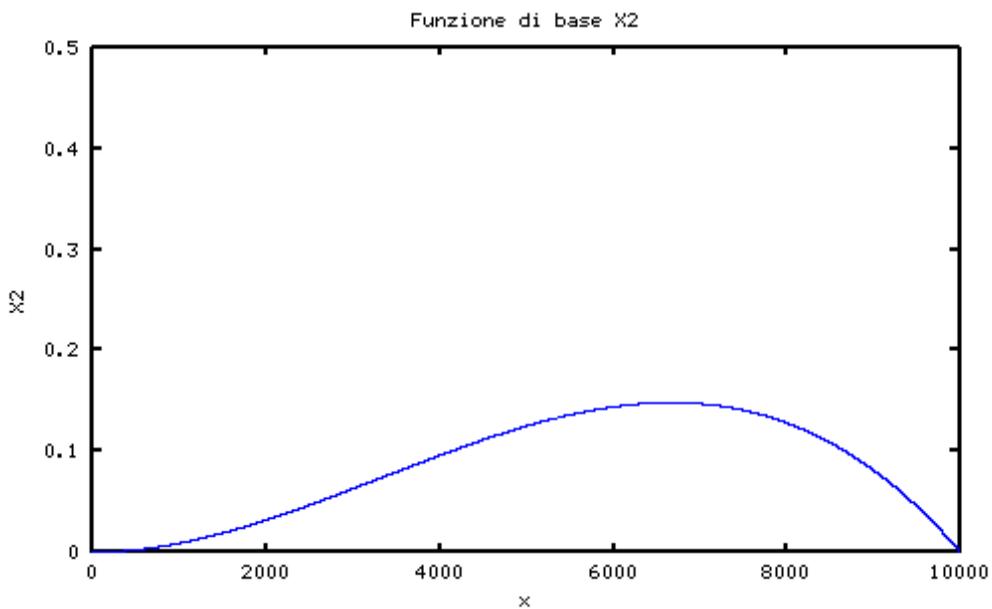


Fig 6.6: Seconda funzione di base per la piastra appoggiata

$$X_1 = \left(\frac{x}{a}\right)^3 - \left(\frac{x}{a}\right)^4 \tag{6.17}$$

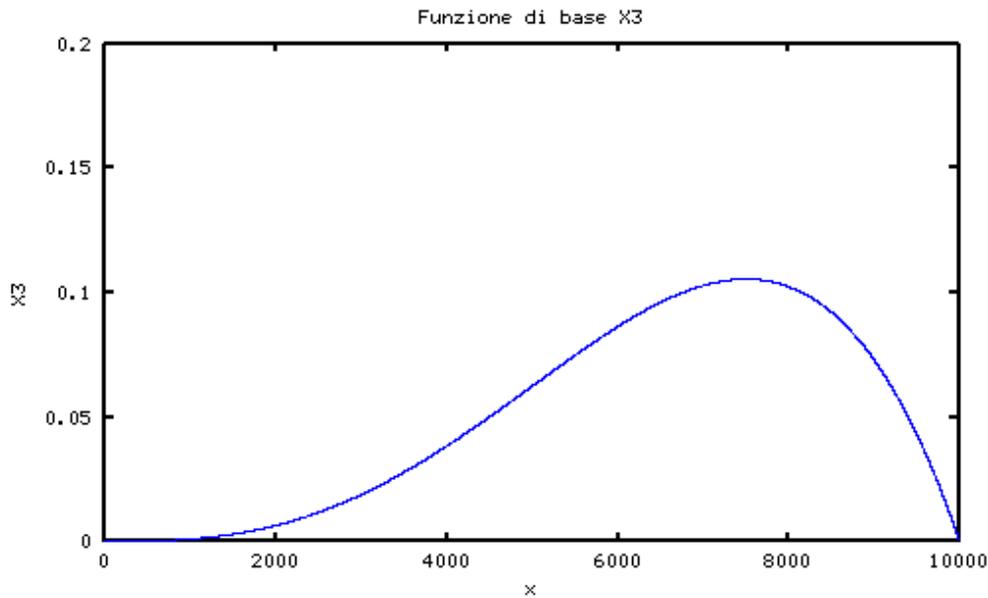


Fig 6.7: Terza funzione di base per la piastra appoggiata

6.2 Scrittura delle matrici di rigidezza e massa

In generale le matrici di rigidezza e di massa per lo studio dinamico di una piastra rettangolare si potranno scrivere in questo modo.

$$\begin{aligned}
 R_{ij,kl} = \int_0^b \int_0^a & \left[D_{11} \frac{d^2 X_i}{dx^2} \frac{d^2 X_k}{dx^2} Y_j Y_l + D_{22} X_i X_k \frac{d^2 Y_j}{dy^2} \frac{d^2 Y_l}{dy^2} \right. \\
 & + D_{12} \left(X_i \frac{d^2 X_k}{dx^2} \frac{d^2 Y_j}{dy^2} Y_l + \frac{d^2 X_i}{dx^2} X_k Y_j \frac{d^2 Y_l}{dy^2} \right) \\
 & \left. + 4D_{66} \frac{dX_i}{dx} \frac{dX_k}{dx} \frac{dY_j}{dy} \frac{dY_l}{dy} \right] dx dy
 \end{aligned} \tag{6.18}$$

$$B_{ij,kl} = \int_0^b \int_0^a \left[I_0 X_i X_k Y_j Y_l + I_2 \left(\frac{dX_i}{dx} \frac{dX_k}{dx} Y_j Y_l + X_i X_k \frac{dY_j}{dy} \frac{dY_l}{dy} \right) \right] dx dy \tag{6.19}$$

Dove viene usata la seguente notazione

$$\begin{aligned}
 R_{11} &= R_{11,11}, R_{12} = R_{11,12}, R_{13} = R_{11,21}, R_{14} = R_{11,22} \\
 R_{21} &= R_{12,11}, R_{22} = R_{12,12}, R_{23} = R_{12,21}, R_{24} = R_{12,22} \\
 R_{31} &= R_{21,11}, R_{32} = R_{21,12}, R_{33} = R_{21,21}, R_{34} = R_{21,22} \\
 R_{41} &= R_{22,11}, R_{42} = R_{22,12}, R_{43} = R_{22,21}, R_{44} = R_{22,22}
 \end{aligned} \tag{6.20}$$

I termini I_0 ed I_2 sono termini inerziali rispettivamente per la traslazione verticale e per la rotazione. Trascurare il secondo termine è possibile in alcune approssimazioni ma qui verrà sempre considerato. Essi saranno definiti come segue

Cap.6 Il metodo di approssimazione di Rayleigh-Ritz

$$I_0 = \rho h \tag{6.21}$$

$$I_2 = \frac{\rho h^3}{12} \tag{6.22}$$

Cap.7 Risultati numerici sulle vibrazioni della piastra

Attraverso i dati in nostro possesso si possono valutare le matrici $[R]$ e $[B]$ tramite applicazioni dedicate al calcolo simbolico. Nello specifico caso è stato utilizzato wxMaxima in ambiente Linux.

$$[R] = \begin{bmatrix} 0.801781878 & 0.400892750 & 0.400892750 & 0.200445491 \\ 0.400892750 & 0.278060119 & 0.200445494 & 0.139029331 \\ 0.400892750 & 0.200445494 & 0.278060119 & 0.1390293307 \\ 0.200445491 & 0.139029331 & 0.139029331 & 0.092685825 \end{bmatrix} \quad (7.1)$$

$$[B] = \begin{bmatrix} 1.927673066 & 0.963827392 & 0.963827392 & 0.481909126 \\ 0.963827392 & 0.525721569 & 0.481909126 & 0.262858292 \\ 0.963827392 & 0.481909126 & 0.525721569 & 0.2628582917 \\ 0.481909126 & 0.262858292 & 0.262858292 & 0.143376578 \end{bmatrix} \times 10^{-7} \quad (7.2)$$

Le frequenze naturali della piastra sono dunque

Tabella 3: Frequenze Naturali Piastra incastrata lungo i bordi [Hz]			
Modo 1	Modo 2	Modo 3	Modo 4
519.31	1071.63	1071.63	1566.08

In letteratura vengono spesso indicate le pulsazioni adimensionalizzate. Vengono dunque indicate procedura di adimensionalizzazione e relativi risultati.

$$\bar{\omega}_{mn} = \omega_{mn} a^2 \sqrt{\frac{\rho h}{D_{22}}} \quad (7.3)$$

Tabella 4: Pulsazioni adimensionalizzate piastra incastrata lungo i bordi			
Modo 1	Modo 2	Modo 3	Modo 4
35.997	74.280	74.280	108.553

La deformata della piastra complessiva è indicata nella figura sottostante.

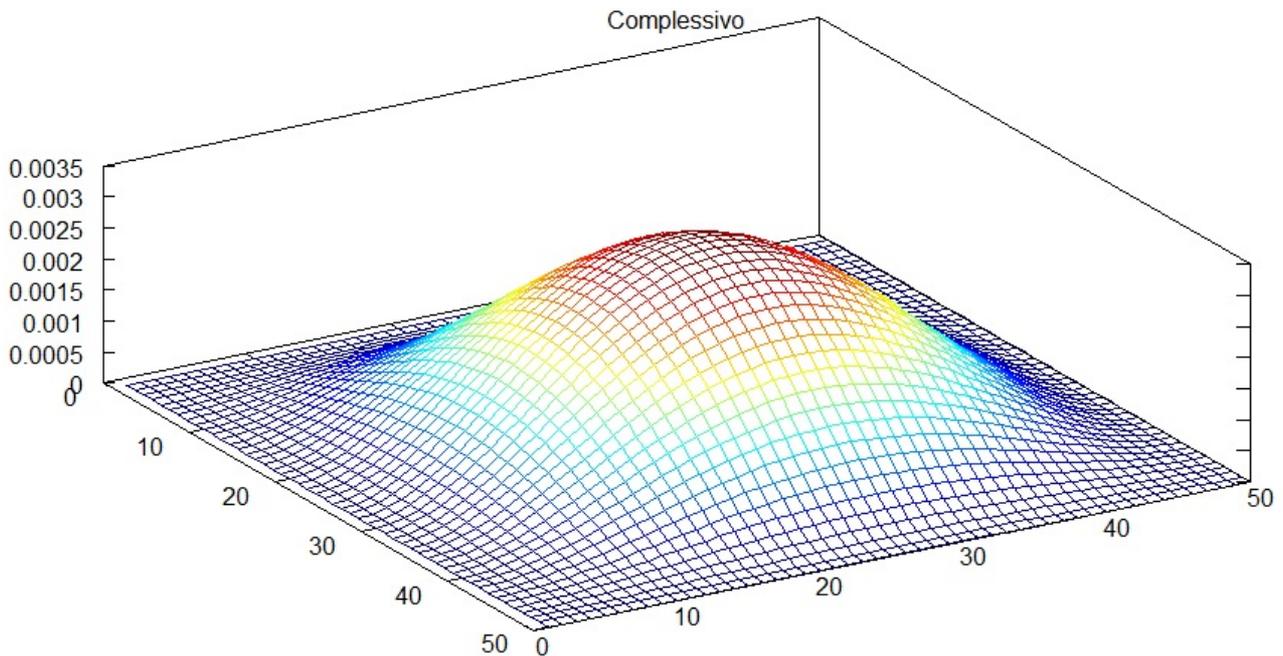


Fig 7.1: Deformata complessiva secondo le funzioni di deflessioni usate

7.1 Confronto dei valori

In letteratura si trovano numerosi dati a confronto che utilizzano questo metodo per l'approssimazione dei modi di oscillazione. Iniziamo dunque dal confrontare i risultati forniti dalla formula chiusa con i valori calcolati tramite il metodo di Rayleigh-Ritz utilizzando calcolo simbolico e quelli ottenuti con il calcolo numerico.

Tabella 5: Confronto pulsazioni tra formula chiusa e metodo di Rayleigh-Ritz			
(m-n)	Formula Chiusa	RR analitico	RR numerico
(1-1)	35.092	35.997 (-2.55 %)	35.986
(1-2)		74.280	74.168
(2-1)		74.280	74.168
(2-2)	107.469	108.553 (-9.79 %)	108.553
(1-3)			137.237
(3-1)			138.014
(2-3)			168.728
(3-2)			168.728
(3-3)	219.324		224.013

Si riporta dunque a confronto quanto viene indicato dal Leissa.

Cap.7 Risultati numerici sulle vibrazioni della piastra

Tabella 5: Confronto pulsazioni tra metodo di Rayleigh-Ritz numerico e valori noti				
(m-n)	LEISSA	RR Numerico	RR Frequenze [Hz]	Err %
(1-1)	35.998	35.986	519	0.03
(1-2)	73.405	74.168	1070	1
(2-2)	108.237	108.553	1566	0.3
(3-1)	131.902	138.014	1991	4.6
(3-2)	165.023	168.728	2434	2.2
(3-3)	220.06	224.013	3232	1.8

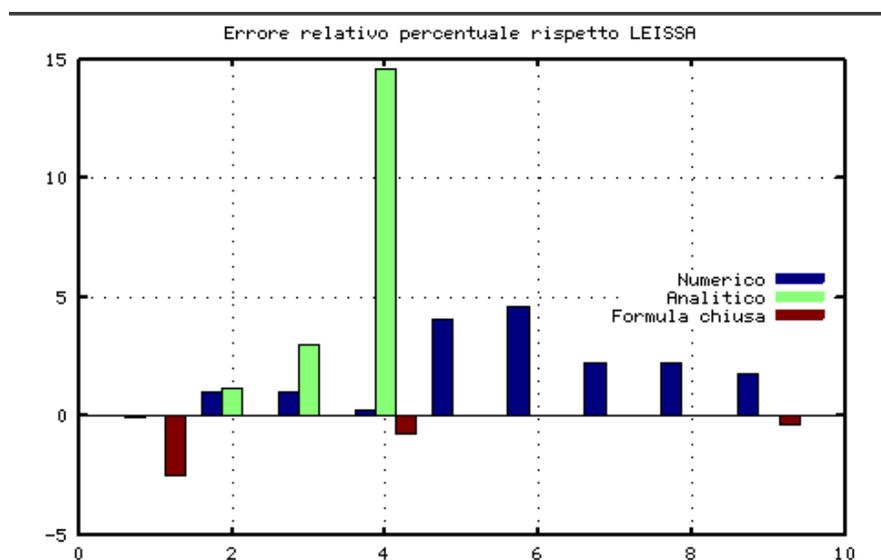


Fig 7.2: Confronto errore relativo percentuale tra i vari metodi

Come si evince dal grafico il primo modo viene ben approssimato da qualunque metodo, mentre se si vuole maggiore precisione occorrerà aumentare le funzioni di base e ricorrere a calcoli analitici o numerici più onerosi.

I seguenti grafici mostrano la deformata per i primi modi di oscillazione della piastra modellizzata secondo le funzioni di base indicate e secondo altre funzioni di base di tipo sinusoidale. Si nota da questi grafici come più ci si allontana dalla fondamentale e più le deformate che approssimano i modi di deflessione differiscono tra loro, cosa che porta alla differenza tra gli autovalori e quindi alle pulsazioni calcolate. È importante dunque una scelta corretta di queste funzioni, soprattutto in caso di necessità di calcolo delle armoniche, anche se le richieste che devono soddisfare si riducono alle sole condizioni al bordo.

Cap.7 Risultati numerici sulle vibrazioni della piastra

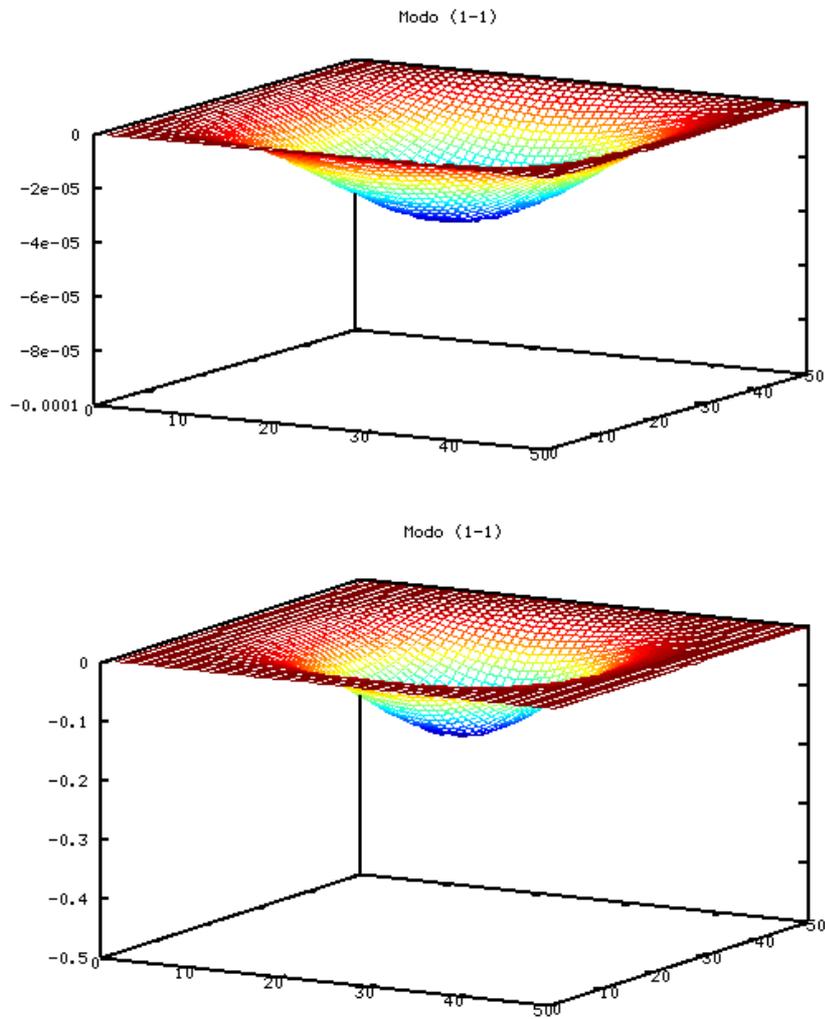


Fig 7.3: Modo (1-1), piastra incastrata, funzioni di base sopra polinomiale, sotto trigonometrica

Cap.7 Risultati numerici sulle vibrazioni della piastra

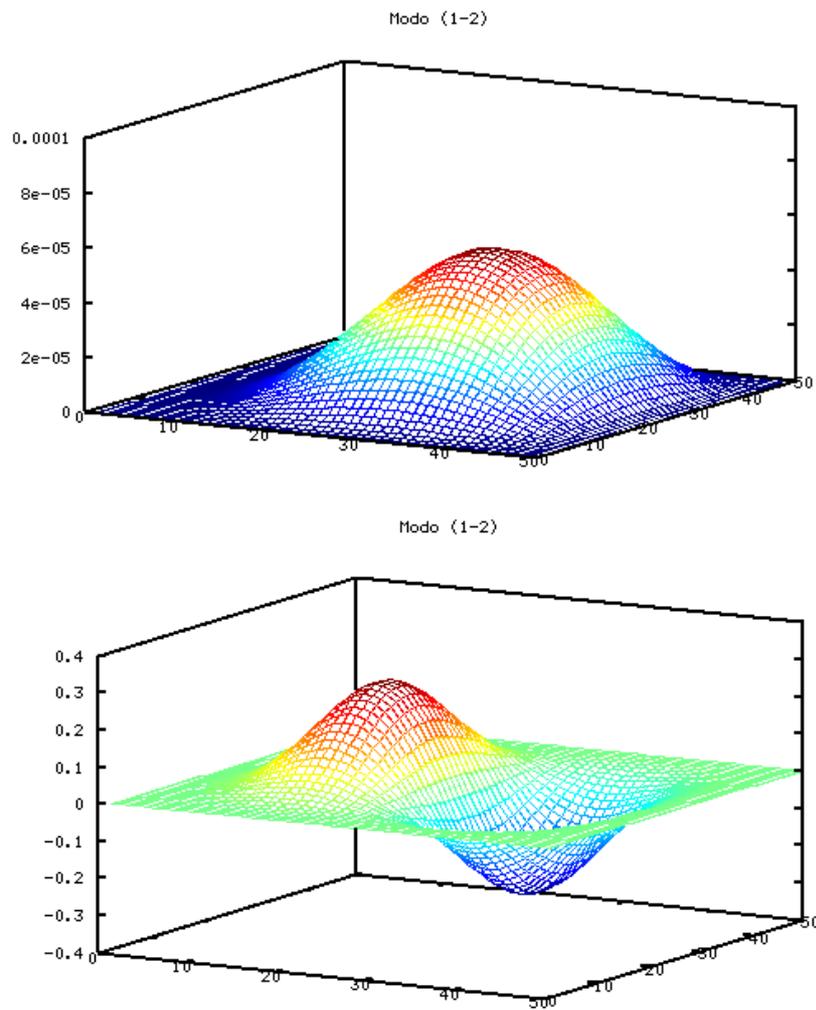


Fig 7.4: Modo (1-2), piastra incastrata, funzioni di base sopra polinomiale, sotto trigonometrica

Cap.7 Risultati numerici sulle vibrazioni della piastra

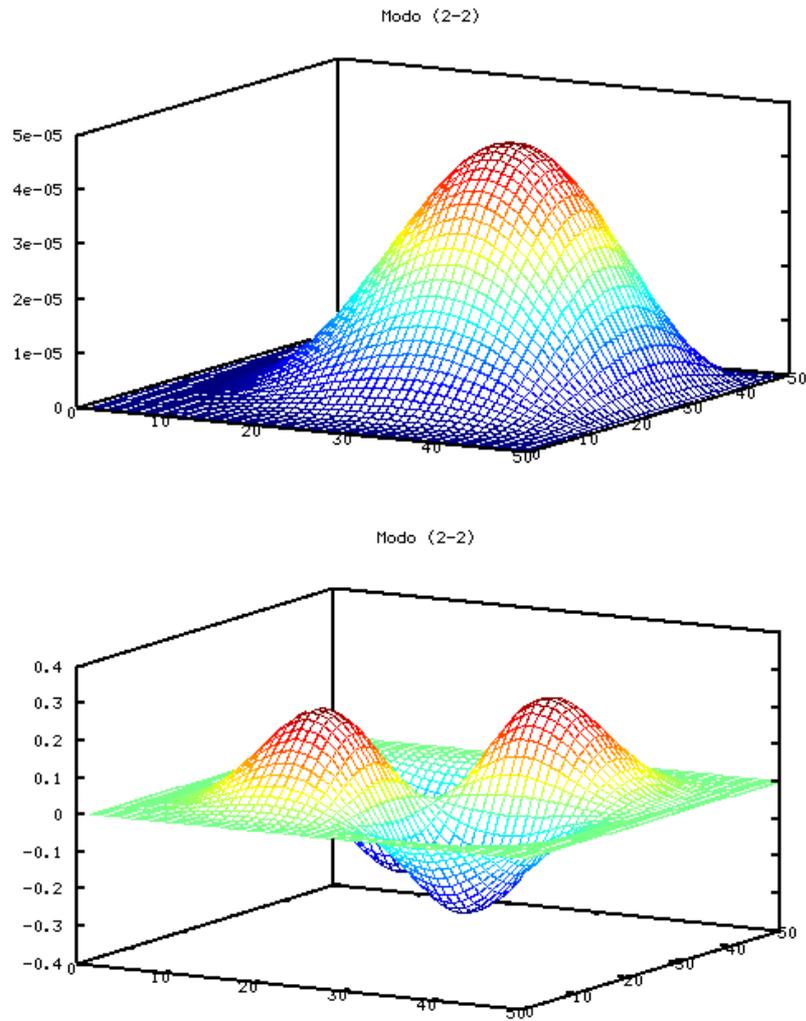


Fig 7.5: Modo (2-2), piastra incastrata, funzioni di base sopra polinomiale, sotto trigonometrica

Cap.8 Analisi modale del pannello sandwich

Esistono diversi studi (come ad esempio [16] dove vengono posti a confronto i risultati dalla CPT con una teoria al terzo ordine) che presentano come non sia corretto l'approssimazione di una piastra sandwich ad una piastra sottile. In virtù delle proprietà della struttura infatti si ha che il fattore dovuto al taglio non è più trascurabile come si può notare nella figura tratta dall'Allen.

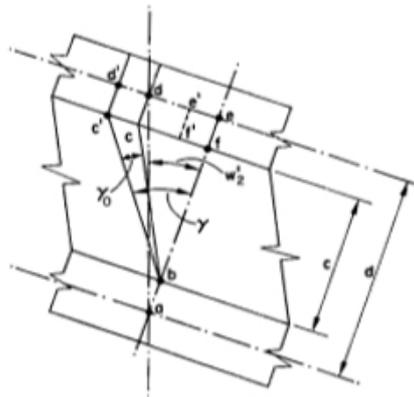


Fig 8.1: Effetto del taglio su una sezione di un pannello sandwich

Per l'applicazione del metodo di Rayleigh-Ritz occorre dunque riscrivere le funzioni di base ed annullare non solo più la freccia e la sua derivata prima (che ne esprimeva la rotazione) ma entrambe indipendentemente.

Esistono però delle relazioni tra le pulsazioni ricavate dalla teoria classica di Kirchhoff e la teoria di Mindlin che ricordiamo essere del primo ordine. Esse dipendono da un fattore K_s detto "shear correction factor" o fattore di correzione a taglio.

È necessario dunque modellizzare la piastra sandwich in modo tale da ricondursi ad una situazione più semplificata. Un buon metodo può essere quello di considerare il core costituito da un unico strato di materiale dalle caratteristiche ortotrope il cui volume coincide con quello del core.

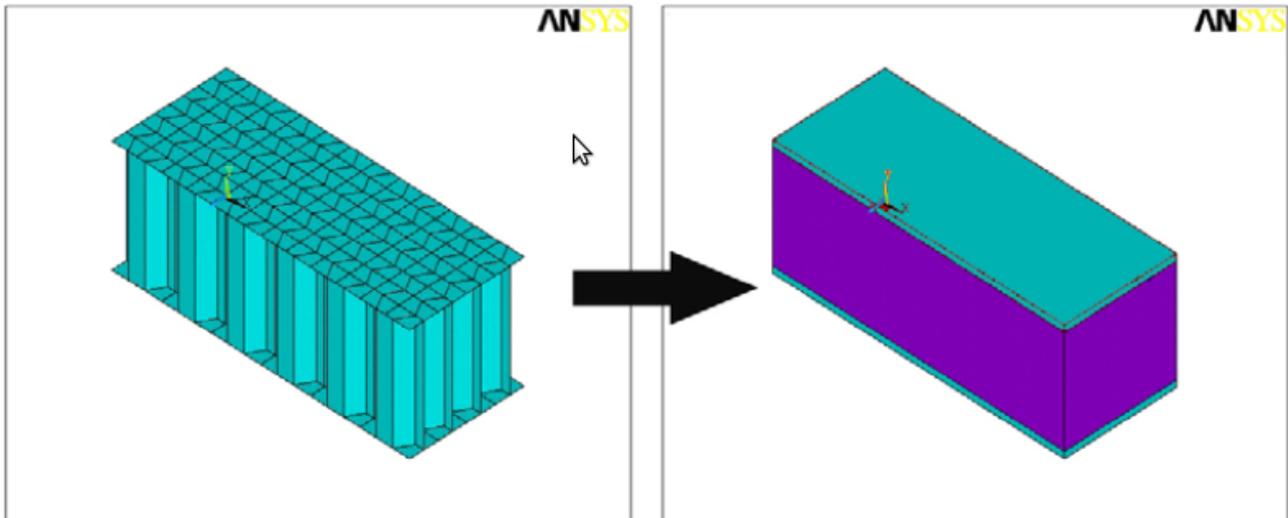


Fig 8.2: Piastra sandwich e modello equivalente a piastre laminate

La figura, tratta da “Investigation of design and analyses principles of honeycomb structures” (ref 17) rappresenta bene come la struttura diventi composta da 3 strati, due corrispondenti alle pelli ed un terzo equivalente al core.

8.1 Grandezze equivalenti in un core di tipo honeycomb

Innanzitutto si definisce un sistema di riferimento per la piastra sandwich. Occorre porre attenzione agli assi. Essendo la struttura non isotropa si possono differenziare W (asse lungo il quale il core risulta più resistente) indicato anche con il pedice 2, ed L indicato dal pedice 1.

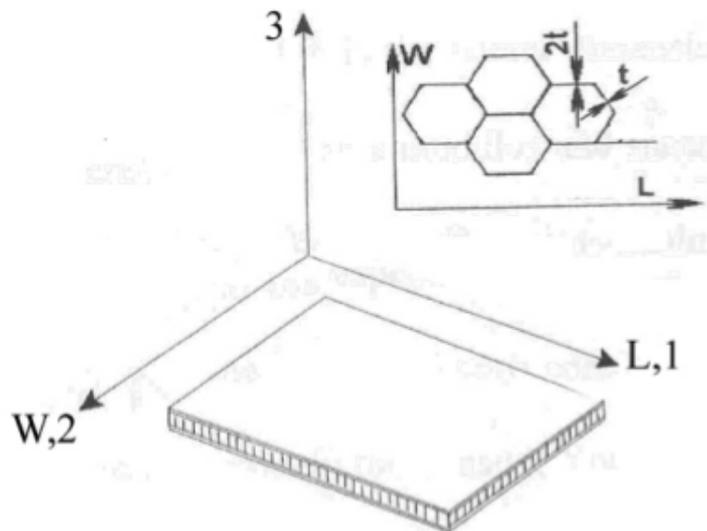


Fig 8.3: Definizione assi piastra sandwich

Occorre inoltre definire la struttura geometrica del nido d'ape.

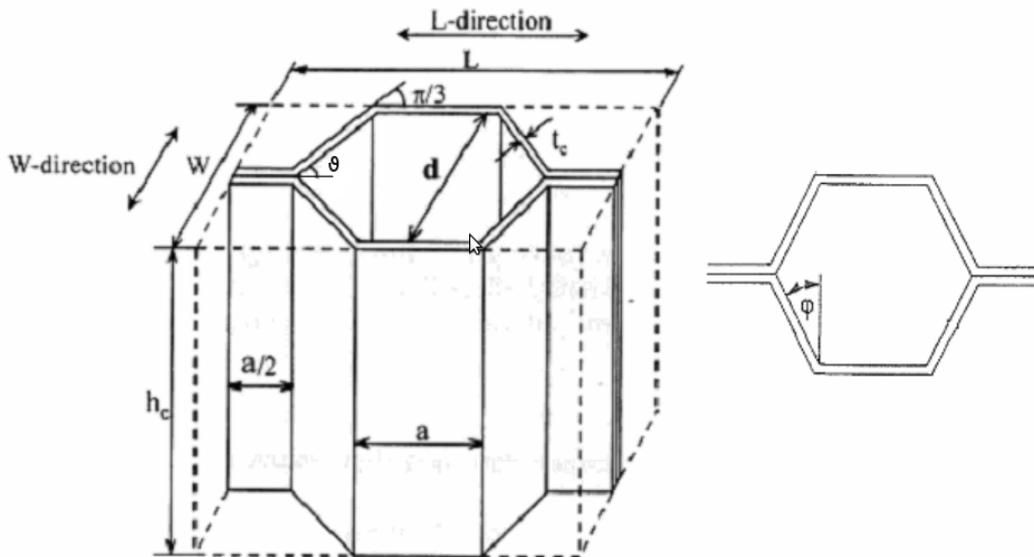


Fig 8.4: Geometria e nomenclatura della cella esagonale honeycomb

Attraverso la funzione MATLAB/OCTAVE indicata nel capitolo dedicato, impostando i dati in nostro possesso, misurati su un campione presente del DET (Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni del Politecnico di Torino) ed assimilando il core di tipo honeycomb a celle esagonali regolari in alluminio, si ottiene:

Dati materiale costituente il core: Alluminio	
Modulo di Young	7.3GPa
Modulo di taglio	2.8077GPa
Coefficiente di Poisson	0.3
Densità	2810kg/m ³

Dati geometria Cella
$a = 0.01m$
$\theta = \pi/3$
$t = 0.1mm$

Dati core tipo Honeycomb equivalenti			
Modulo di Young	$E_1 = 0.29270MPa$	$E_2 = 0.22478MPa$	$E_3 = 648.89MPa$
Modulo di taglio	$G_{12} = 51.873kPa$	$G_{13} = 374.636MPa$	$G_{23} = 277.508MPa$
Coefficiente di Poisson	$\nu_{12} = 0.7518$	$\nu_{13} = 1.302 * 10^{-4}$	$\nu_{23} = 9.99 * 10^{-5}$
Densità	$\rho_c = 0.023094 * \rho_{Al} = 64.89kg/m^3$		

Come si può notare le proprietà equivalenti del core dipendono fortemente dall'asse lungo il quale vengono misurati.

Dal documento ESDU 85037 possiamo trovare indicata la soluzione per passare dalle pulsazioni ricavate per una piastra semplicemente appoggiata a quella incastrata tramite le “dimensioni effettive”.

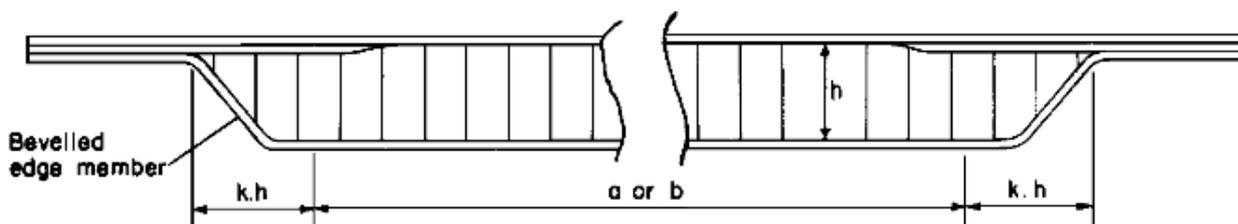


Fig 8.5: Riduzione delle dimensioni effettive in funzione del tipo di condizione al bordo

La figura mostra un procedimento per l'applicazione dei risultati per una piastra semplicemente appoggiata ad una incastrata variandone le dimensioni. Il valore della costante k per una piastra sandwich honeycomb può variare da 0 a 5 in funzione della rigidità del telaio a cui è collegata. Poiché l'errore che consegue alla scelta errata di questa costante è decisamente elevato, si consiglia una misura pratica per la verifica del valore. Per valori di k intorno a 3 i valori convergono alla soluzione ricavata a partire da condizioni al bordo incastrate.

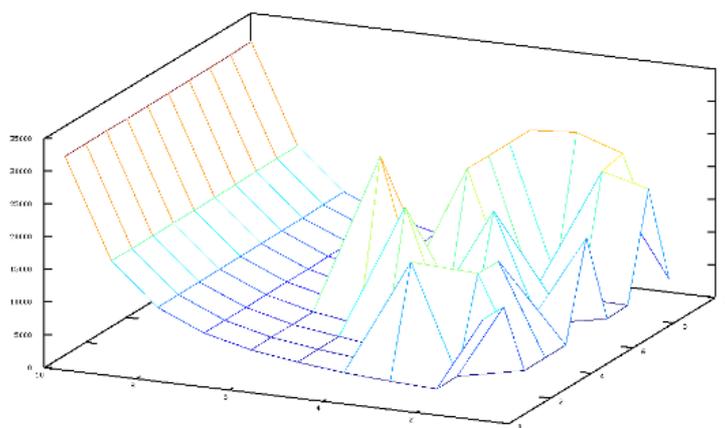


Fig 8.6: Variazione della frequenza fondamentale in funzione della scelta di k sui due assi.

8.2 Modello di piastra laminata

Una piastra composta da diversi strati ortotropi viene detta piastra laminata (laminated plate in letteratura inglese) per le quali esistono numerose teorie di studio.

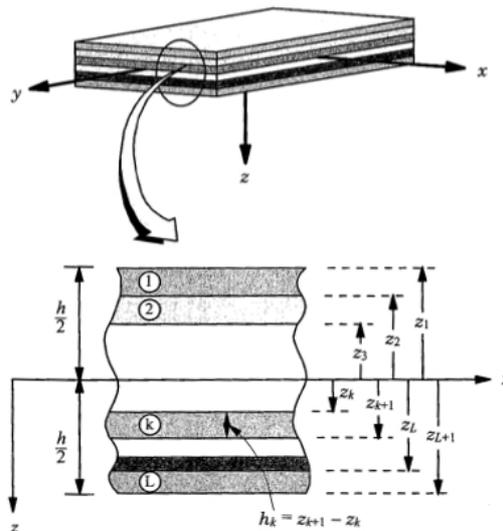


Fig 8.7: Schema piastra laminata

Nel caso di strati disposti simmetricamente rispetto al piano medio il tensore di rigidezza viene calcolato nel seguente modo

$$D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^N \bar{Q}_{ij}^{(k)} (z_{k+1}^3 - z_k^3) \quad (8.1)$$

dove

$$\bar{Q}_{11}^{(k)} = \frac{E_1^k}{1 - \nu_{12}^k \nu_{21}^k}, \quad \bar{Q}_{12}^{(k)} = \frac{\nu_{21}^k E_1^k}{1 - \nu_{12}^k \nu_{21}^k}, \quad \bar{Q}_{22}^{(k)} = \frac{E_2^k}{1 - \nu_{12}^k \nu_{21}^k} \quad (8.2)$$

$$\bar{Q}_{16}^{(k)} = \bar{Q}_{26}^{(k)} = 0, \quad \bar{Q}_{66}^{(k)} = G_{12}^k, \quad \bar{Q}_{44}^{(k)} = G_{23}^k, \quad \bar{Q}_{55}^{(k)} = G_{13}^k \quad (8.3)$$

8.3 Relazione tra CPT e FSDT

È possibile, senza ulteriori complicazioni, valutare le pulsazioni per una teoria che valuta lo sforzo di taglio nel materiale a partire da quelle ricavate per la teoria classica (CPT o di Kirchhoff).

Dunque per il calcolo delle pulsazioni di vibrazione occorrerà calcolare le matrici $[R]$ e $[B]$ utilizzando le funzioni di deflessioni per piastra semplicemente appoggiata di dimensioni ridotte (secondo Fig 8.4) e poi utilizzare la seguente relazione per ottenere le pulsazioni secondo la teoria di Mindlin.

$$\omega_M^2 = \frac{6GK_s}{\rho h^2} \left\{ \left[1 + \frac{1}{12} \omega_K h^2 \sqrt{\frac{\rho h}{D}} \left(1 + \frac{2}{K_s(1-\nu^2)} \right) \right] - \sqrt{\left[1 + \frac{1}{12} \omega_K h^2 \sqrt{\frac{\rho h}{D}} \left(1 + \frac{2}{K_s(1-\nu^2)} \right) \right]^2 - \frac{\rho h^2}{3GK_s} \omega_K^2} \right\} \quad (8.4)$$

Cap.8 Analisi modale del pannello sandwich

Le pulsazioni risulteranno leggermente ritorte come viene rappresentato dal seguente grafico.

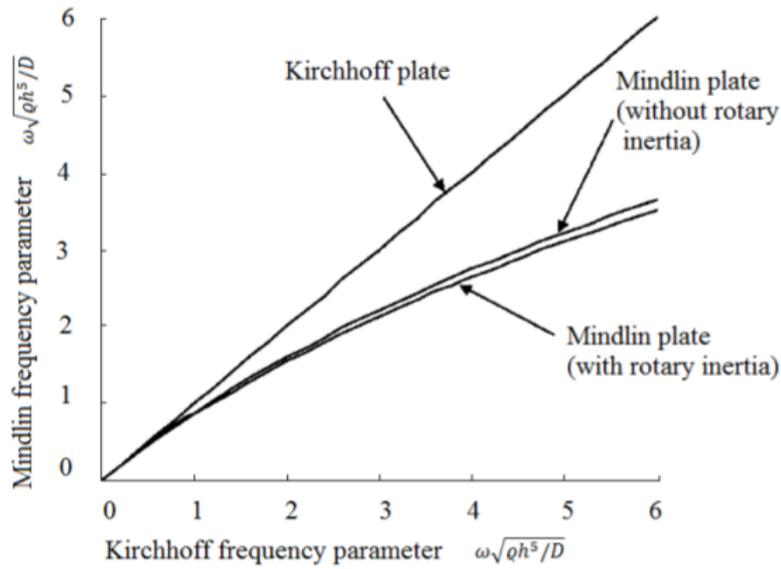


Fig 8.8: Confronto CPT e teoria di Reissner-Mindlin

Il fattore che esprime la presenza di sforzi di taglio è detto *shear correction factor* e si indica con K_S . Wittrick propone una relazione per piastre isotrope in funzione del coefficiente di Poisson

$$K_S = \frac{5}{6 - \nu} \tag{8.5}$$

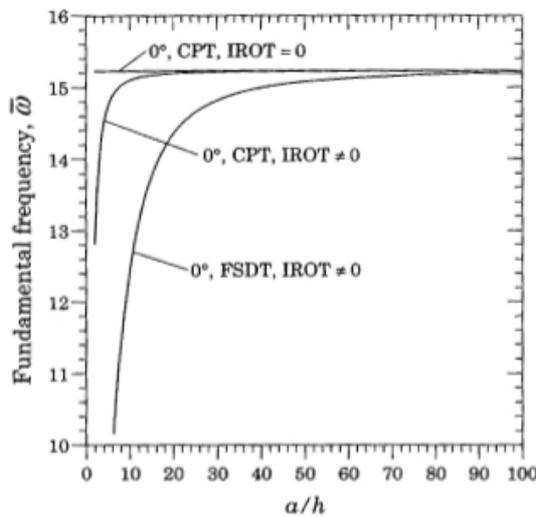


Fig 8.9: Confronto sulla pulsazione fondamentale

Mentre nel caso di strutture sandwich, come indicato in [20] da Birman e Bert, è più adatto utilizzare un fattore più vicino all'unità. Per il caso della piastra sandwich verrà quindi adottata

Cap.8 Analisi modale del pannello sandwich

questa soluzione mentre per la piastra sottile in alluminio ignoreremo questa differenza. Anche a questo scopo è stata scritta una funzione MATLAB/OCTAVE che utilizza la relazione sopra.

Cap.9 Risultati numerici sulla piastra sandwich

Dall'utilizzo delle funzioni sopra indicate si indicano i risultati ottenuti per due differenti tipi di strutture.

Piastra sandwich quadrata costituita interamente in alluminio, core honeycomb	
Dimensione a	0.165m
Dimensione b	0.165m
Modulo di Young	73GPa
Modulo di taglio	2.8077GPa
Coefficiente di Poisson	0.3
Spessore totale	0.01m
Spessore facce	0.0015m
Spessore lamina costituente il core	0.0001m
Diametro cella	0.01m

Densità globale

$$781kg/m^3 \quad (9.1)$$

Densità core

$$64.89kg/m^3 \quad (9.2)$$

Tensore di rigidezza flessionale piastra (ristretto, non vengono indicati D_{44} e D_{55})

$$D = \begin{bmatrix} 4.392 & 1.318 & 0 \\ 1.318 & 4.392 & 0 \\ 0 & 0 & 1.537 \end{bmatrix} * 10^3 \quad (9.3)$$

Dai quali si notano i vantaggi nell'utilizzazione di una struttura di questo genere se posti a confronto con i valori relativi ad una struttura omogenea.

Pulsazioni relative alla piastra sandwich in alluminio		
(m-n)	Frequenza [Hz]	Pulsazioni adimensionalizzate
(1-1)	4874	35.139
(1-2)	9801	70.666
(2-2)	14027	101.133
(3-1)	17472	126.971
(3-2)	21054	151.798

Cap.9 Risultati numerici sulla piastra sandwich

(3-3)	27085	195.277
-------	-------	---------

Piastra sandwich quadrata core honeycomb in alluminio, facce in PCB	
Dimensione a	0.165 m
Dimensione b	0.165m
Modulo di Young FR4	24GPa
Coefficiente di Poisson FR4	0.13
Densità FR4	1850kg/m ³
Spessore totale	15.50mm
Spessore facce	3 * 10 ⁻⁴ m
Spessore lamina costituente il core	1 * 10 ⁻⁴ m
Diametro cella	10mm

Densità globale

$$132.68kg/m^3 \quad (9.4)$$

Densità core

$$64.89kg/m^3 \quad (9.5)$$

Tensore di rigidezza flessionale piastra (ristretto, non vengono indicati D_{44} e D_{55})

$$D = \begin{bmatrix} 846.29 & 110.08 & 0 \\ 101 & 846.29 & 0 \\ 0 & 0 & 368.09 \end{bmatrix} \quad (9.6)$$

Pulsazioni relative alla piastra quadrata core in alluminio, facce in FR4		
(m-n)	Frequenza [Hz]	Pulsazioni adimensionalizzate
(1-1)	4035	34.012
(1-2)	7865	66.290
(2-2)	10972	92.473
(3-1)	13422	113.742
(3-2)	15856	133.638
(3-3)	19788	166.780

Cap.9 Risultati numerici sulla piastra sandwich

Piastra sandwich rettangolare core honeycomb in alluminio, facce in PCB	
Dimensione a	0.165 m
Dimensione b	0.330m
Modulo di Young FR4	24GPa
Coefficiente di Poisson FR4	0.13
Spessore totale	15.50mm
Spessore facce	$3 * 10^{-4}m$
Spessore lamina costituente il core	$1 * 10^{-4}m$

Densità globale

$$132.68kg/m^3 \quad (9.7)$$

Densità core

$$64.89kg/m^3 \quad (9.8)$$

Tensore di rigidezza flessionale piastra (ristretto, non vengono indicati D_{44} e D_{55})

$$D = \begin{bmatrix} 846.29 & 110.08 & 0 \\ 101 & 846.29 & 0 \\ 0 & 0 & 368.09 \end{bmatrix} \quad (9.9)$$

Pulsazioni relative alla piastra rettangolare core in alluminio, facce in FR4		
(m-n)	Frequenza [Hz]	Pulsazioni adimensionalizzate
(1-1)	2806	23.648
(1-2)	3594	30.291
(2-1)	5042	42.495
(2-2)	6999	58.993
(1-3)	7649	64.466
(3-1)	8772	73.932
(2-3)	12823	108.080
(3-2)	13348	112.504
(3-3)	14217	119.826

Cap.10 Matrice di smorzamento

Lo smorzamento nelle strutture è dovuto principalmente a fenomeni di isteresi e/o di attrito negli elementi di collegamento. Questi fenomeni sono però difficili da modellare e da inserire nelle equazioni di dinamica strutturale, per cui il fenomeno dello smorzamento è generalmente approssimato dallo smorzamento viscoso, attraverso il fattore o rapporto di smorzamento ξ . Il valore di ξ dipende dal materiale e dal livello di tensione. Per strutture imbullonate o rivettate ξ può variare dal 2% al 15%.

Questo metodo è molto utilizzato nei codici strutturali in quanto permette di inserire due soli parametri per il calcolo del comportamento della struttura. Infatti possiamo indicare la matrice $[C]$ detta "matrice di smorzamento" come combinazione lineare della matrice di rigidità e di massa

$$[C] = \alpha[B] + \beta[R] \quad (10.1)$$

dove il fattore di smorzamento (ad una determinata pulsazione) vale

$$\xi_i = \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha}{\omega_i} + \beta\omega_i \right) \quad (10.2)$$

L'equazione di moto trasversale diventerà

$$[B]\{\ddot{S}\} + [C]\{\dot{S}\} + [R]\{S\} = \{F(t)\} \quad (10.3)$$

Si possono ricavare sperimentalmente le due costanti α e β (dette anche costanti di smorzamento di Rayleigh) tramite la misura di due coppie di valori ovvero $(\omega_1, \xi_1), (\omega_2, \xi_2)$

$$\alpha = 2 \frac{\omega_1\omega_2(\omega_2\xi_1 - \omega_1\xi_2)}{\omega_2^2 - \omega_1^2} \quad (10.4)$$

$$\beta = 2 \frac{\omega_2\xi_2 - \omega_1\xi_1}{\omega_2^2 - \omega_1^2} \quad (10.5)$$

Considerando quindi alcuni valori possibili tra i due casi estremi si indicano le pulsazioni adimensionalizzate e le frequenze fondamentali per la piastra piana in alluminio

$$\omega_S = \omega_N \sqrt{1 - \xi^2} \quad (10.6)$$

Rapporto di smorzamento (ξ)	Pulsazioni adimensionalizzate ($\bar{\omega}_{11}$)		Frequenza fondamentale (f_{11}) [Hz]	
	Piastra	Sandwich rettan.	Piastra	Sandwich rettan.
0.02	35.978	23.643	519.06	2805
0.06	35.921	23.605	518.23	2801
0.1	35.806	23.529	516.57	2792
0.15	35.579	23.380	513.30	2774

Cap.11 Funzioni MATLAB/OCTAVE per l'analisi modale

11.1 Calcolo delle funzioni di base

Rende tre funzioni di base ortogonali tra loro in funzione di tre parametri: dimensione massima, numero di nodi,

```
% Rende tre funzioni di base ortogonali tra loro
function [x1, dx1, d2x1, x2, dx2, d2x2, x3, dx3, d2x3] =
funzione_base(max, npunti, forma)
x = linspace(0, max, npunti); % dominio su cui calcolo
if(forma == 0) % appoggio semplice 1 (Reddy)
% Funzioni di base FRECCIA PIASTRA PIANA (Annullo freccia e non la
derivata, REDDY)
x1 = (x./max) .- (x./max).^2;
x2 = (x./max).^2 .- (x./max).^3;
x3 = (x./max).^3 .- (x./max).^4;
dx1 = (ones(1, npunti)./max) .- 2.*(x./(max^2));
dx2 = 2.*(x./(max^2)) .- 3.*((x.^2)/(max^3));
dx3 = 3.*((x.^2)/(max^3)) .- 4.*((x.^3)/(max^4));
d2x1 = ones(1, npunti) .* (-2/(max^2));
d2x2 = (2/(max^2)).*ones(1, npunti) .- 6.*(x./(max^3));
d2x3 = 6.*(x./(max^3)) .- 12.*((x.^2)/(max^4));
elseif (forma == 1) % appoggio semplice 2 (gherlone, NASA TP-2009-
21556)
x1 = (x./max).^2 .- (x./max);
x2 = (x./max).^3 .- (3/2).*(x./max).^2 .+ (1/2).*(x./max);
x3 = (x./max).^4 .- 2.*(x./max).^3 .+ (17/14).*(x./max).^2 .-
(3/14).*(x./max);
dx1 = (2/(max^2)).*x .- (1/max).*ones(1, npunti);
dx2 = (3/(max^3)).*(x.^2) .- (3/(max^2)).*x + (1/(2*max)).*ones(1,
npunti);
dx3 = (4/(max^4)).*(x.^3) - (6/(max^3)).*(x.^2) + (17/
(7*(max^2))).*x - (3/(14*max)).*ones(1, npunti);
d2x1 = (2/(max^2)).*ones(1, npunti);
d2x2 = ((6/(max^3)).*x) .- (3/(max^2)).*ones(1, npunti);
d2x3 = (12/(max^4)).*(x.^2) - (12/(max^3)).*x + (17/
(7*(max^2))).*ones(1, npunti);
elseif (forma == 2) % incastro
% Funzioni di base PIASTRA PIANA SOTTILE (Annullo freccia e derivata
prima contemporaneamente)
x1 = (x./max).^2 .- 2.*(x./max).^3 .+ (x./max).^4;
```

```

x2 = (x./max).^3 .- 2.*(x./max).^4 .+ (x./max).^5;
x3 = (x./max).^4 .- 2.*(x./max).^5 .+ (x./max).^6;
dx1 = 2.*x.*(1./(max.^2)) .- 6.*(x.^2).*(1./(max.^3)) +
4.*(x.^3).*(1./(max.^4));
dx2 = 3.*(x.^2).*(1./(max.^3)) .- 8.*(x.^3).*(1./(max.^4)) .+
5.*(x.^4).*(1./(max.^5));
dx3 = 4.*(x.^3).*(1./(max.^4)) .- 10.*(x.^4).*(1./(max.^5)) .+
6.*(x.^5).*(1./(max.^6));
d2x1 = 2.*(1./(max.^2)) .- 12.* x.*(1./(max.^3)) + 12.*(x.^2).*(1./
(max.^4));
d2x2 = 6.*x.*(1./(max.^3)) .- 24.*(x.^2).*(1./(max.^4)) .+
20.*(x.^3).*(1./(max.^5));
d2x3 = 12.*(x.^2).*(1./(max.^4)) .- 40.*(x.^3).*(1./(max.^5)) .+
30.*(x.^4).*(1./(max.^6));
elseif (forma == 3) %appoggio semplice soluzione esatta
elseif (forma == 4) %incastro soluzione sinusoidale
x1=3.*sin((3.14./max).*x)-sin(3.*((3.14./max).*x));
x2=2.*sin(2.*((3.14./max).*x))-sin(4.*((3.14./max).*x));
x3=(5/3).*sin(3.*((3.14./max).*x))-sin(5.*((3.14./max).*x));
end
return

```

11.2 Calcolo numerico delle matrici R e B

È stata realizzata la seguente funzione MATLAB/OCTAVE per il calcolo delle matrici R e B utilizzando il metodo dei trapezi per l'approssimazione degli integrali. Questa funzione prende in input il dominio dei punti (la griglia), due matrici (una per la variabile x ed una per la variabile y) che presentano sulle colonne in successione la funzione di deflessione, la derivata prima e la derivata seconda. Si può così aumentare facilmente la precisione aggiungendo semplicemente la i-esima funzione di deflessione calcolata tramite ortogonalizzazione di Gram-Schmidt dalle precedenti. Infine occorre fornirgli il tensore di rigidezza flessionale e la matrice $[I]$ costituita dai due elementi I_0 e I_2 .

```

%Calcola matrice di rigidezza e massa per una piastra in base alle
funzioni di deflessione
%passate in input tramite il metodo di Rayleigh Ritz (il numero di
funzioni per ogni coordinata
%è interpretato in modo automatico)
% dom_x          dominio di calcolo (griglia)
% dom_y          dominio di calcolo (griglia)
% x,y           matrici composta dalle colonne [x, dx, d2x] in sequenza

```

Cap.11 Funzioni MATLAB/OCTAVE per l'analisi modale

```
% D      tensore di rigidezza flessionale
% I      vettore costituito da I0 e I2
%NOTA per ottenere le funzioni 3*a-2), le derivate 3*a-1, le derivate
seconde 3*a
function [R, B] = calc_rayleigh(dom_x, dom_y, x, y, D, I)

    num_ex=size(x, 2)/3;

    R=zeros(num_ex^2);

    for i=1:num_ex
        for j=1:num_ex
            for k=1:num_ex
                for l=1:num_ex

                    val1=D(1,1).*trapz(dom_x', x(:, 3.*i).*x(:,
3.*k)).*trapz(dom_y', y(:, 3.*j.-2).*y(:, 3.*l.-2));
                    val2=D(2,2).*trapz(dom_x',x(:, 3.*i.-2).*x(:, 3.*k.-
2)).*trapz(dom_y', y(:, 3.*j).*y(:, 3.*l));
                    val3=D(1,2).*trapz(dom_x',x(:, 3.*i.-2).*x(:,
3.*k)).*trapz(dom_y', y(:, 3.*j).*y(:, 3.*l.-2));
                    val4=D(1,2).*trapz(dom_x',x(:, 3.*i).*x(:, 3.*k.-
2)).*trapz(dom_y', y(:, 3.*j.-2).*y(:, 3.*l));
                    val5=4.*D(3,3).*trapz(dom_x', x(:, (3.*i-1)).*x(:, (3.*k-
1))).*trapz(dom_y', y(:, (3.*j-1)).*y(:, (3.*l-1)));

                    val6=I(1).*trapz(dom_x', x(:, 3.*i.-2).*x(:, 3.*k.-
2)).*trapz(dom_y', y(:, 3.*j.-2).*y(:, 3.*l.-2));
                    val7=I(2).*trapz(dom_x', x(:, 3.*i.-1).*x(:, 3.*k.-
1)).*trapz(dom_y', y(:, 3.*j.-2).*y(:, 3.*l.-2));
                    val8=I(2).*trapz(dom_x', x(:, 3.*i.-2).*x(:, 3.*k.-
2)).*trapz(dom_y', y(:, 3.*j.-1).*y(:, 3.*l.-1));

                    ind_riga = base2dec(strcat(num2str(i-1),num2str(j-1)),
num_ex);
                    ind_colonna = base2dec(strcat(num2str(k-1),num2str(l-1)),
num_ex);

                    R(ind_riga + 1, ind_colonna + 1) =
val1+val2+val3+val4+val5;
```

```

        B(ind_riga + 1, ind_colonna + 1) = val6+val7+val8;
    end
end
end
end

return

```

11.3 Calcolo delle grandezze equivalenti per un core in honeycomb

Tramite la seguente funzione MATLAB/OCTAVE, la quale si basa sul metodo di E. Nast (Ref 18) descritto da Aydinçak si possono ricavare i moduli di elasticità, di taglio ed i coefficienti di poisson relativi al solo core.

```

% Calcola le proprieta' del core modello honeycomb di un pannello
sandwich (esagono regolare)
% input
% E_hc modulo elasticita' materiale (core)
% pois_hc coefficiente di poisson (core)
% a lunghezza lato inclinato
% theta semi angolo di inclinazione pareti (radianti)
% t spessore lamina del core
% f fattore riduzione peso (Vtot*densita'*f = peso core)
function [E, pois, G, f] = honeycomb_core(E_hc, pois_hc, a, theta, t)
% inizializzazione matrici
E = zeros(1, 3);
pois = zeros(1, 3);
G = zeros(1, 3);
% grandezze ausiliarie geometriche
d = 2*a*sin(theta);
phi = pi/2 - theta;
G_hc=E_hc/(2*(1+pois_hc)); % modulo di elasticità tangenziale
% moduli di elasticita'
E(1) = ((t^3)*(1+sin(phi))*E_hc)/((12*(a^3)*((cos(phi))^2)*(1-
(pois_hc^2))*(5*cos(phi)-3)/(24)));
E(2) = ((t^3)*cos(phi)*E_hc)/((1+sin(phi))*(a^3)*(sin(phi))^2*(1-
(pois_hc^2)));
E(3) = (2*E_hc*t)/((1+cos(theta))*sin(theta)*d);
% coefficienti di poisson

```

```

pois(1) = ((1+sin(phi)) * ((sin(phi))^2))/
(12*((cos(phi))^2)*((cos(phi)/3)-((1+cos(phi))/8))); %v_12

pois(2) = (pois_hc*(t^2)*((sin(phi)+1)^2))/
(24*(a^2)*cos(phi)*((cos(phi)/3)-((1+cos(phi))/8))*(1-(pois_hc^2)));
%v_13

pois(3) = (pois_hc*(cos(phi)^2)*(t^2))/(2*(a^2)*((sin(phi))^2)*(1-
(pois_hc^2))); %v_23

% moduli di taglio

G(1) = (E_hc*(t^3)*(1+sin(phi)))/((1-(pois_hc^2)) * (a^3) *
cos(phi)*(6.25-6*sin(phi))); %G_12

G(2) = (G_hc*2*t)/(a*cos(phi)*(1+sin(phi))); %G_13

G(3) = (10*t*G_hc)/(9*a*((cos(phi))^3)*(1+sin(phi))); %G_23

% riduzione percentuale volume

f = (4*sqrt(3)*t)/(3*a);

return

```

11.4 Calcolo del tensore di rigidezza di un sandwich

La seguente funzione MATLAB/OCTAVE unisce questo modello ad i risultati ottenuti precedentemente per la conversione del core in uno strato omogeneo ed ortotropo e fornisce il tensore di rigidezza flessionale e la densità per l'intera piastra.

```

% Calcola il tensore di rigidezza flessionale per una piastra honeycomb
% approssimandola come una piastra laminata composta da tre strati
% (2 pelli ed il core) richiamando la funzione honeycomb_core per il
% calcolo delle proprietà del core
% input
% E_f      modulo elasticità materiale (facce)
% E_hc     modulo elasticità materiale (core)
% pois_f   coefficiente di poisson (facce)
% pois_hc  coefficiente di poisson (core)
% spess_tot spessore totale piastra
% spess_f  spessore di una faccia
% a        lunghezza lato inclinato
% theta    semi angolo di inclinazione pareti (radianti)
% t        spessore lamina del core
% dens_f   densità del materiale delle pelli
% dens_c   densità del materiale del core

function [D, dens] = honeycomb_lam (E_f, pois_f, E_hc, pois_hc,
spess_tot, spess_f, t, a, theta, dens_f, dens_c)

```

Cap.11 Funzioni MATLAB/OCTAVE per l'analisi modale

```
% inizializzazione
D = zeros(3);
Q = zeros(6, 12); %matrice Q composta come [Q_f, Q_c] (affiancate)

% richiamo il calcolo delle proprieta' equivalenti del core
[E_c, v_c, G_c, f_c] = honeycomb_core(E_hc, pois_hc, a, theta, t)

G_f=E_f/(2*(1+pois_f)); % modulo di elasticità
tangenziale facce

% Q_f
Q(1, 1) = E_f/(1- (pois_f^2));
Q(1, 2) = (pois_f*E_f)/(1- (pois_f^2));
Q(2, 1) = Q(1, 2);
Q(2, 2) = E_f / (1- (pois_f^2));
Q(6, 6) = G_f;
Q(4, 4) = G_f;
Q(5, 5) = G_f;

% Q_c
Q(7, 7) = E_c(1)/(1- (v_c(1)*v_c(2)));
Q(7, 8) = (v_c(2)*E_c(1))/(1- (v_c(1)*v_c(2)));
Q(8, 8) = E_c(2) / (1- (v_c(1)*v_c(2)));
Q(12, 12) = G_c(1);
Q(10, 10) = G_c(3);
Q(11, 11) = G_c(2);

% calcolo posizioni relative
z(1) = -spess_tot /2;
z(2) = -spess_tot/2 + spess_f;
z(3) = spess_tot/2 - spess_f;
z(4) = spess_tot/2;

% calcolo tensore di rigidezza flessionale
for i=1:6
    for j=1:6
        D(i, j) = 1/3 * ((2* (Q(i, j) * (z(2)^3 - z(1)^3))) +
```

```
(Q(i+6, j+6) * (z(3)^3 - z(2)^3));
    end
end

% calcolo densita' globale
f_c*dens_c*((spess_tot - spess_f)/(spess_tot + spess_f))

dens = f_c*dens_c*((spess_tot - spess_f)/(spess_tot + spess_f))
+2*dens_f*(spess_f/(spess_tot+spess_f));
return
```

11.5 Relazione CPT-FSDT

Calcola le pulsazioni secondo la teoria di Reissner-Mindlin date quelle della teoria di Kirchhoff e fornendo alcuni dati sulla piastra.

```
% Applica la correzione di Midlin sulle pulsazioni indicate da
puls_k inserendo in input
% puls_k pulsazioni calcolate con CPT
% G Modulo di elasticità a taglio
% k2 Shear Correction Factor
% dens densità materiale
% h spessore piastra
% D modulo di rigidezza della piastra
% poisson modulo di poisson
function puls=midlin(puls_k, G, k2, dens, h, D, poisson)
temp=(1 .+ (1./12).*puls_k.*(h.^2).*sqrt((dens.*h)./D).*(1.+(2./
(k2.*(1.-poisson)))));

puls=sqrt((6.*G.*k2)./(dens.*(h.^2)).* (temp.- sqrt(temp.^2 .-
((dens.*(h.^2).*(puls_k.^2))./(3.*G.*k2)))));
return
```

Cap.12 Analisi termica della tile tipo 1B8

Si riprende per questa sezione il lavoro eseguito dal prof. Leonardo Reyneri per il calcolo delle resistenze termiche per la piastra di alluminio pieno. Ricordiamo che una tile di tipo 1B8 (la Power Management tile) è costituita nell'architettura AraMis da una piastra in alluminio da 1.6 mm² sulle cui facce sono incollati tramite resina termoconduttiva due schede in FR4, sulla faccia esterna con le celle fotovoltaiche, sulla faccia interna con alcuni componenti elettronici tra cui un'induttanza per il controllo d'assetto.

Il PCB interno verrà idealizzato tramite il modello semplificato indicato in figura

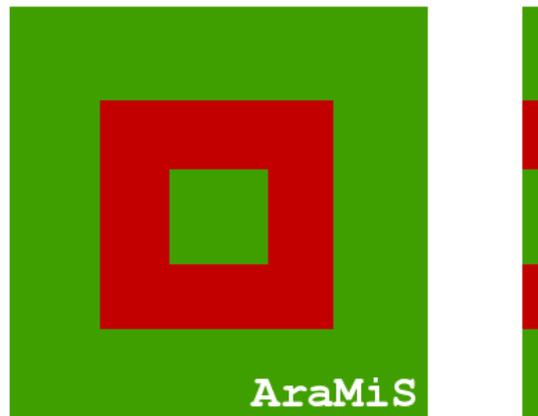


Fig 12.1: Modello scheda PCB interna

La figura puramente indicativa serve a rappresentare come viene idealizzata la scheda, in verde troviamo l'FR4 mentre in rosso notiamo il rame che costituisce la bobina e la massa. Le dimensioni della bobina vengono assunte di 54 x 62 x 0.08 mm e la larghezza della pista di 15 mm.

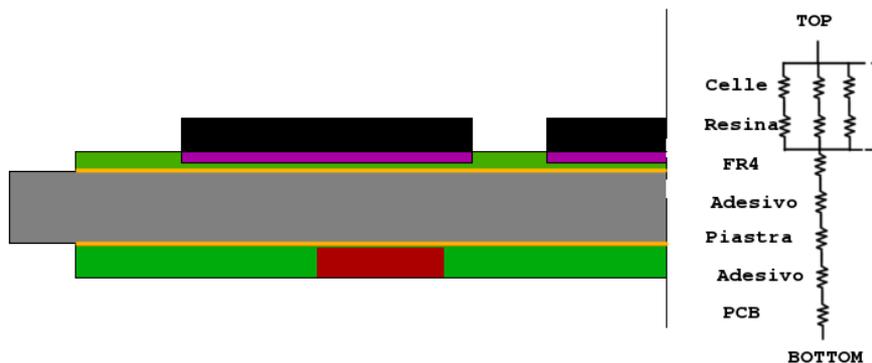


Fig 12.2: Vista in sezione della tile 1B8

Consideriamo la tile composta da quattro strati:

- Celle solari (spessore 150 μ m, 6 in totale)
- strato di FR-4 (spessore 0.3 mm)
- piastra in alluminio (spessore 1.6 mm)
- scheda PCB (spessore 0.8 mm)

Tra gli strati ci sarà un'ulteriore strato di adesivo termoconduttivo di 0.5 mm.

Si elencano alcuni dati relativi alla conducibilità termica dei materiali utilizzati

Tabella 6: Conducibilità materiali	
Materiale	$\sigma_{\theta} \left(\frac{W}{Km} \right)$
Alluminio	210
FR4 (through-plane)	0.29 - 0.343
FR4 (in-plane)	0.81 - 1.059
Rame	401
Resina termoconduttiva	0.81 - 1.25
Silicio (Celle)	148

Si comincia appunto con il calcolo relativo alla conduzione di calore tra la cella fotovoltaica e la piastra.

12.1 Calcolo superficie di conduzione tra celle fotovoltaiche e piastra

Utilizzando i dati indicati nel capitolo sull'analisi termica del sistema e considerando la superficie delle celle fotovoltaiche pari a 26 cm² possiamo calcolare l'energia termica da trasferire alla piastra. La percentuale di energia convertita in elettricità sarà data da $\gamma = 0,23 * 0,8$ dove 23 % è la percentuale convertita e 80 % l'efficienza del alimentatore che andrà a caricare le batterie

$$P_{in} = (1 - \gamma)J_s S = 0.816 * 1367 * 26 * 10^{-4} = 2.90W \quad (12.1)$$

Assumendo un ΔT di 10 K e supponendo uno spessore di 0,5 mm si ottiene una conducibilità termica necessaria pari a

$$\sigma_{\theta} = \frac{P_{in} * d}{\Delta T S} = \frac{2.90 * 0.5 * 10^{-3}}{10 * 5 * 10^{-5}} = 0.29 \frac{W}{Km} \quad (12.2)$$

Dalla tabella delle conducibilità termiche notiamo che questo valore è accettabile si otterrà un ΔT minore di 10 K sia utilizzando la resina conduttiva che ponendo a diretto contatto le celle con il PCB.

12.2 Calcolo della resistenza termica tra il centro ed i bordi della tile

Assumendo un'approssimazione circolare, di raggio R_2 leggermente maggiore alla metà del lato della tile ($R_2 = 8.75$ cm) e spessore di h (1.6 mm) con la fonte di calore circolare dalla superficie di circa 20 cm² ($R_1 = 2.5$ cm circa), la resistenza termica tra il centro della cella ed il bordo sarà data da

Cap.12 Analisi termica della tile tipo 1B8

$$R_{CE} = (R_{CB,Al} // R_{CB,PCB} // R_{CB,FR4} // R_{CB,Celle}) + R_{BE,Al} \quad (12.3)$$

Considerando la conducibilità dell'alluminio (vedi Tabella 6)

$$R_{CE,Al} = \int_{R_1}^{R_2} \frac{dR}{K_{Al} 2\pi R h} = \frac{1}{K_{Al} 2\pi h} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) = \frac{1}{210 * 2 * \pi * 1.6 * 10^{-3}} \ln(3.5) = 0.593 K/W \quad (12.4)$$

Utilizzando un modello semplificato quella del PCB interno sarà

$$R_{CE,PCB} = \int_{R_1}^{R_{anello1}} \frac{dR}{K_{FR-4} 2\pi R h} + \int_{R_{anello1}}^{R_{anello2}} \frac{dR}{K_{Cu} 2\pi R h} + \int_{R_{anello2}}^{R_2} \frac{dR}{K_{FR-4} 2\pi R h} \quad (12.5)$$

$$R_{CB,PCB} = \frac{1}{0.81 * 2 * \pi * 0.8} \ln(1.22) + \frac{1}{401 * 2 * \pi * 0.8} \ln(1.26) + \frac{1}{0.81 * 2 * \pi * 0.8} \ln(2.14) = 235.93/W \quad (12.6)$$

La scheda esterna contribuirà con

$$R_{CB,FR-4} = \frac{\ln(3.3)}{0.81 * 2 * \pi * 0.3 * 10^{-3}} = 782.36 K/W \quad (12.7)$$

$$R_{celle} = \frac{\ln(1.26)}{148 * 2 * \pi * 150 * 10^{-6}} = 1.66 K/W \quad (12.8)$$

$$R_{resina} = \frac{\ln(1.26)}{0.81 * 2 * \pi * 5 * 10^{-4}} = 90.87 K/W \quad (12.9)$$

Per l'adesivo termoconduttivo

$$R_{adesivo} = \frac{\ln(3.3)}{0.81 * 2 * \pi * 5 * 10^{-4}} = 469.81 K/W \quad (12.10)$$

Avremo dunque una resistenza termica equivalente dal centro al bordo pari a

$$R_{CE} = 0.433 K/W \quad (12.11)$$

12.3 Resistenza termica tra due lati paralleli

Presi in considerazione due rod composti da due profili quadri in alluminio di lato pari a L_2 (6 mm) e lunghezza pari al lato della piastra la resistenza termica tra due lati paralleli opposti diventa

$$R_{BB} = R_{PCB} // R_{Al,1} // R_{FR-4} // R_{celle} // R_{adesivocelle} // R_{adesivo} // R_{Al,2} + R_{Al,3} \quad (12.12)$$

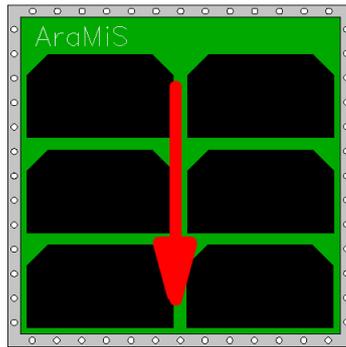


Fig 12.3: Verso considerato

dove la resistenza termica delle parti in alluminio si divide in (1) coperto da schede, (2) in parallelo alle schede, (3) in serie alle schede

$$R_{1,Al} = \frac{L_{scheda}}{K_{Al}Lh} = \frac{0.155}{210 * (0.155 * 1.6 * 10^{-3})} = 2.98K/W \quad (12.13)$$

$$R_{2,Al} = \frac{L_{scheda}}{K_{Al}((L - L_{scheda})h + 2(L_2)^2)} = \frac{0.155}{210 * (0.01 * 1.6 * 10^{-3} + 2 * (6 * 10^{-3})^2)} = 8.39K/W \quad (12.14)$$

$$R_{3,Al} = \frac{L - L_{scheda}}{K_{Al}(Lh + 2(L_2)^2)} = \frac{0.01}{210 * (0.165 * 1.6 * 10^{-3} + 2 * (6 * 10^{-3})^2)} = 0.14K/W \quad (12.15)$$

utilizziamo il solito modello approssimato per la scheda all'interno scriviamo

$$R_{PCB} = 2R_{FR-4} + (2R_{Cu} // R_{FR-4,in} // R_{FR-4,est}) = 930.86K/W \quad (12.16)$$

Per la scheda all'esterno consideriamo di ammassare tutte le celle solari in un'unica superficie centrale e di separare quindi la scheda in una parte nuda (1) ed in una parte composta da tre strati (FR-4 + adesivo + celle) (2)

$$R_{esterna} = R_{FR-4,1} + (R_{celle} // R_{adesivo} // R_{FR-4,2}) \quad (12.17)$$

$$R_{FR-4,1} = \frac{1}{0.81 * 0.0003} \left(\frac{2 * 0.035}{0.155} + \frac{0.12}{2 * 0.075} \right) = 5151K/W \quad (12.18)$$

$$R_{FR-4,2} = \frac{3 * 0.04}{0.81 * 2 * 0.07 * 3 * 10^{-4}} = 3527K/W \quad (12.19)$$

Per lo strato di silicio di cui sono composte le celle fotovoltaiche (considerate un'unica superficie e dallo spessore di 150 µm)

$$R_{celle} = \frac{L}{K_{silicio}S_{celle}} = \frac{3 * 0.04}{148 * 2 * (70 * 10^{-3} * 150 * 10^{-6})} = 38.61K/W \quad (12.20)$$

Cap.12 Analisi termica della tile tipo 1B8

$$R_{adesivo} = \frac{3 * 0.04}{0.81 * 2 * (70 * 10^{-3} * 5 * 10^{-4})} = 2116K/W \quad (12.21)$$

Quindi la resistenza per la scheda esterna da un estremo all'altro è

$$R_{esterna} = 5188K/W \quad (12.22)$$

Contributo degli strati di adesivo

$$R_{adesivi} = \frac{0.155}{2 * 0.81 * 5 * 10^{-4} * 0.155} = 1234K/W \quad (12.23)$$

Otteniamo dunque una resistenza termica totale tra due lati paralleli di

$$R_{BB} = 2.33K/W \quad (12.24)$$

12.4 Calcolo della resistenza termica tra la faccia interna ed esterna

La resistenza termica sarà la somma delle 3 resistenze

$$R_{eq} = R_{celle,adesivo} + R_{FR4} + R_{piastra} + R_{PCB} + 2R_{adesivo} \quad (12.25)$$

La resistenza termica della piastra in alluminio sarà data da

$$R_{piastra} = \frac{L_{piastra}}{K_{Al}S_{Al}} = \frac{1.6 * 10^{-3}}{210 * 2.72 * 10^{-2}} = 0.28 * 10^{-3}K/W \quad (12.26)$$

Usando il metodo semplificato per il PCB otteniamo

$$R_{PCB} = R_{FR4,interno} // R_{Cu,anello} // R_{FR4,esterno} = 7.67 * 10^{-4}K/W \quad (12.27)$$

La resistenza termica delle celle fotovoltaiche sarà data similmente da

$$R_{celle} = \frac{L_{cella}}{6K_{cella}S_{cella}} = \frac{150 * 10^{-6}}{6 * 148 * 70 * 10^{-3} * 40 * 10^{-3}} = 6.32 * 10^{-5}K/W \quad (12.28)$$

$$R_{adesivo} = \frac{L_{adesivo}}{K_{adesivo}S_{adesivo}} = \frac{0,5 * 10^{-3}}{6 * 0.81 * 2.72 * 10^{-2}} = 3.78 * 10^{-3}K/W \quad (12.29)$$

$$R_{FR-4} = \frac{L_{FR-4}}{K_{FR-4}S_{FR-4}} = \frac{0,8 * 10^{-3}}{0.81 * 2.72 * 10^{-2}} = 3.63 * 10^{-2}K/W \quad (12.30)$$

L'adesivo termoconduttivo tra le schede e la piastra darà un contributo di

$$R_{adesivo} = \frac{L_{adesivo}}{K_{adesivo}S_{adesivo}} = \frac{5 * 10^{-4}}{0.81 * 2.72 * 10^{-2}} = 2.27 * 10^{-2}K/W \quad (12.31)$$

Ottenendo una resistenza equivalente pari a

$$R_{eq} = 0.064K/W \quad (12.32)$$

12.5 Fra due Tile parallele in configurazione di minimo cubo

Si considera la configurazione di minimo cubo. La resistenza termica tra i centri di due facce parallele sarà data dal parallelo delle resistenze termiche delle pareti laterali sommate alla resistenza tra centro e bordo di ogni tile.

$$R_{AB} = \frac{R_{BB}}{4} + 2R_{CE} = \frac{2.33}{4} + 2 * 0.433 = 1.45K/W \quad (12.33)$$

Nel caso di sola struttura in alluminio

$$R_{AB} = \frac{R_{BB}}{4} + 2R_{CE} = \frac{2.34}{4} + 2 * 0.593 = 1.77K/W \quad (12.34)$$

12.6 Calcolo dei differenziali di temperatura

Potenza termica raggiunta

Per la potenza in ingresso si assume la sola potenza proveniente dal Sole sulla faccia illuminata. Vengono trascurati sia gli apporti sulle superfici laterali che l'albedo, poiché viene considerata una sola faccia del satellite. (I valori di assorbanza sono quelli ricavati sperimentalmente, vedi capitolo successivo)

Caso a: semplice piastra in alluminio

$$P_{solare} = \alpha_{Al} J_s S = 0.07 * 1367 * 2.72 * 10^{-2} = 2.60W \quad (12.35)$$

Caso b: tile con celle fotovoltaiche non funzionanti

$$P_{solare} = \alpha_{senzacelle} J_s S = 0.771 * 1367 * 2.72 * 10^{-2} = 28.67W \quad (12.36)$$

Caso c: tile completa di celle fotovoltaiche (funzionanti)

Indicando con η_{celle} (23 %) il rendimento delle celle fotovoltaiche

$$P_{solare} = (1 - \eta_{celle}) \alpha_{globale} J_s S = 21.91W \quad (12.37)$$

Tra faccia interna ed esterna

Caso a: semplice piastra in alluminio

Cap.12 Analisi termica della tile tipo 1B8

$$\Delta T = PR_{termica} = 2.60 * 0.28 * 10^{-3} = 7 * 10^{-4} < 10^{-3} K \quad (12.38)$$

Caso b: tile con celle fotovoltaiche non funzionanti

$$\Delta T = PR_{termica} = 28.67 * 0.064 = 1.83 K \quad (12.39)$$

Caso c: tile completa di celle fotovoltaiche (funzionanti)

$$\Delta T = PR_{termica} = 24.21 * 0.05 = 1.40 K \quad (12.40)$$

Tra centro e bordi della tile

Caso a: semplice piastra in alluminio

$$\Delta T = P * R_{termica} = 2.60 * 0.593 = 1.54 K \quad (12.41)$$

Caso b: tile con celle fotovoltaiche non funzionanti

$$\Delta T = P * R_{termica} = 28.67 * 0.433 = 12.41 K \quad (12.42)$$

Caso c: tile completa di celle fotovoltaiche (funzionanti)

$$\Delta T = P * R_{termica} = 21.91 * 0.433 = 9.49 K \quad (12.43)$$

Fra due estremi paralleli

Caso a: semplice piastra in alluminio

$$\Delta T = PR_{termica} = 2.60 * 2.33 = 6.06 K \quad (12.44)$$

Caso b: tile con celle fotovoltaiche non funzionanti

$$\Delta T = PR_{termica} = 28.67 * 2.33 = 66.80 K \quad (12.45)$$

Caso c: tile completa di celle fotovoltaiche

$$\Delta T = PR_{termica} = 21.91 * 2.33 = 51.05 K \quad (12.46)$$

Fra due Tile parallele in configurazione di minimo cubo

Caso a: semplice piastra in alluminio

$$\Delta T = PR_{termica} = 2.60 * 1.45 = 3.77 K \quad (12.47)$$

Cap.12 Analisi termica della tile tipo 1B8

Caso b: tile con celle fotovoltaiche non funzionanti

$$\Delta T = PR_{termica} = 28.67 * 1.77 = 50.74K \quad (12.48)$$

Caso c: tile completa di celle fotovoltaiche

$$\Delta T = PR_{termica} = 21.91 * 2.33 = 38.78K \quad (12.49)$$

Cap.13 Analisi termica di un pannello sandwich

Citando la NASA TECHNICAL NOTE D-714 [4] la determinazione dell'effettiva conducibilità termica è complicato poiché il calore trasferito è generalmente una funzione nonlineare della temperatura. Inoltre le modalità di trasporto del calore interagiscono tra loro complicando ancora il problema.

In ogni caso il calore trasmesso dall'aria, che risulta in minima parte comunque presente, è trascurabile. Inoltre in molti casi la struttura del sandwich è composta da fogli molto sottili rendendo molto piccolo il salto di temperatura attraverso di essi ovvero la resistenza termica attraverso di essi può essere trascurata rendendo possibile un'analisi mono dimensionale.

Utilizzando queste semplificazioni le equazioni della conduzione e dell'irraggiamento possono essere ricavate tramite una procedura alle differenze finite come utilizzato in [5].

Immaginiamo di dividere il sistema in J elementi indipendenti ed isotermi. Ognuno di essi subirà un trasferimento di calore in ingresso che si dividerà tra la conduzione degli elementi vicini, un irraggiamento in funzione dei fattori di vista netti (in letteratura denominati "net radiation factor"), una parte fornita ad esempio da un fluido ed una produzione interna. Questo calore in ingresso comporterà un aumento di temperatura il cui studio ci permetterà di effettuare l'analisi.

Il calore trasmesso per conduzione dall'elemento $m - 1$ all'elemento m sarà

$$A_{m,m-1} k_{m,m-1} \frac{(T_{m-1} - T_m) \Delta \tau}{l_{m,m-1}} \quad (13.1)$$

Dove i simboli rappresentano rispettivamente

- $A_{m,m-1}$ l'area media di conduzione
- $k_{m,m-1}$ la conducibilità termica media
- $l_{m,m-1}$ la distanza tra i centri degli elementi
- $\Delta \tau$ l'infinitesimo temporale

Analogamente consideriamo il calore trasmesso dall'elemento $m + 1$ a m

$$A_{m,m+1} k_{m,m+1} \frac{(T_{m+1} - T_m) \Delta \tau}{l_{m,m+1}} \quad (13.2)$$

Dove la notazione è analoga alla precedente. Ad aggiungersi abbiamo dunque il calore giunto per irraggiamento

$$\sigma \sum_{k=1}^J A_k \epsilon_k (G_{k,m} - \delta_{k,m}) T_k^4 \Delta \tau \quad (13.3)$$

13.1 Derivazione dei fattori di vista netti

I fattori di vista netti o net radiation factors indicano quanta parte dell'energia emessa da un

Cap.13 Analisi termica di un pannello sandwich

elemento viene assorbita dal secondo. Per esempio $G_{1,2}$ è la frazione di energia totale emessa dall'elemento 1 che viene assorbita dall'elemento 2 dopo un numero infinito di riflessioni. Questi valori sono in funzione dei "configuration factors" definiti come frazione dell'energia totale emessa da un elemento che risulta direttamente incidente su un altro elemento, e delle assorbanze degli elementi stessi.

Cerchiamo ora di ricavare i net radiation factors in forma chiusa.

Prendiamo un sistema chiuso diviso in J elementi isotermi con una data assorbanza α_m indipendente dalla posizione dell'elemento. Detta A_m l'area del suddetto elementino e q_n il flusso di calore totale emesso per irraggiamento, $F_{n,m}$ sarà la frazione di energia che viene irradiata da n a m.

Il calore trasmesso a m sarà dunque

$$Q_{n,m} = A_n F_{n,m} q_n \quad (13.4)$$

mentre quello assorbito e riflesso saranno rispettivamente

$$Q_{n,abs} = \alpha_m A_n F_{n,m} q_n; Q_{n,ref} = (1 - \alpha_m) A_n F_{n,m} q_n \quad (13.5)$$

La stessa cosa succederà per ogni elementino m_i . Possiamo dunque scrivere l'energia totale trasmessa dall'elemento n all'elemento m dopo una singola riflessione come

$$A_n q_n \sum_{m_i=1}^J (1 - \alpha_{m_i}) F_{n,m_i} F_{m_i,m} \quad (13.6)$$

Per considerare l'energia che gli elementi m_i hanno riflesso non direttamente su m ma che al secondo ciclo viene assorbita da esso dovremmo aggiungere una seconda sommatoria. Ora, indicando le matrici $[F]$, $[\alpha]$, $[E] = 1 - [\alpha]$ e con $G_{n,m}$ la frazione dell'energia emessa dall'elemento n che viene assorbita da m dopo infinite riflessioni

$$[G] = \sum_{i=0}^{\infty} [[F][E]]^i [F][\alpha] \quad (13.7)$$

matematicamente esprimibile come

$$[G] = [[I] - [F][E]]^{-1} [F][\alpha] \quad (13.8)$$

Il calore proveniente da un fluido ad una determinata temperatura $T_{a,m}$

$$A_m k_m (T_{a,m} - T_m) \Delta\tau \quad (13.9)$$

Infine abbiamo l'eventuale produzione di calore

$$A_m Q_m \Delta\tau \quad (13.10)$$

Cap.13 Analisi termica di un pannello sandwich

Il calore netto in ingresso all'elemento m sarà dunque la somma di tutte le quantità viste precedentemente e causerà un aumento di temperatura

$$\Delta q_m = \rho_m V_m C_{p,m} \Delta T_m \quad (13.11)$$

Facendo dunque tendere l'intervallo di tempo a zero avremo dunque il bilancio termico dell'elemento m .

$$\begin{aligned} \rho_m V_m C_{p,m} \frac{dT_m}{d\tau} = & A_m Q_m + A_m k_m (T_{a,m} - T_m) + A_{m,m+1} k_{m,m+1} \frac{(T_{m+1} - T_m)}{l_{m,m+1}} \\ & + A_{m,m-1} k_{m,m-1} \frac{(T_{m-1} - T_m)}{l_{m,m-1}} + \sigma \sum_{k=1}^J A_k \epsilon_k (G_{k,m} - \delta_{k,m}) T_k^4 \end{aligned} \quad (13.12)$$

Passando al caso stazionario di equilibrio termico abbiamo in definitiva

$$\begin{aligned} A_m Q_m + A_m k_m (T_{a,m} - T_m) + A_{m,m+1} k_{m,m+1} \frac{(T_{m+1} - T_m)}{l_{m,m+1}} \\ + A_{m,m-1} k_{m,m-1} \frac{(T_{m-1} - T_m)}{l_{m,m-1}} + \sigma \sum_{k=1}^J A_k \epsilon_k (G_{k,m} - \delta_{k,m}) T_k^4 = 0 \end{aligned} \quad (13.13)$$

13.2 Assunzioni per un sandwich con core modello honeycomb

Si assume come approssimazione che la conducibilità termica sia costante al valore corrispondente alla temperatura media del pannello. Inoltre si considera che le celle del nido d'ape siano cilindri circolari retti (vedi figura).

Nel caso di queste particolari strutture è possibile fare una assunzione molto importante. Poichè lo spessore dei due strati che costituiscono questo sandwich sono solitamente molto sottili, è possibile trascurare l'esistenza di un gradiente di temperatura attraverso di esse. Nella realtà è necessario valutare bene caso per caso. Se prendiamo i dati da un produttore (ref. 9) notiamo che esistono anche pannelli sandwich con pelli in alluminio laminato con spessori fino anche a 2 mm, in tal caso va assolutamente considerata la trasmissione del calore tra il centro ed i bordi della piastra. Ma nel caso di foglie di 0.5 mm la resistenza termica arriverebbe ad essere di 1.76 K/W ovvero circa 3 volte la resistenza termica calcolata tra il centro ed il bordo per una piastra da 1.5 mm.

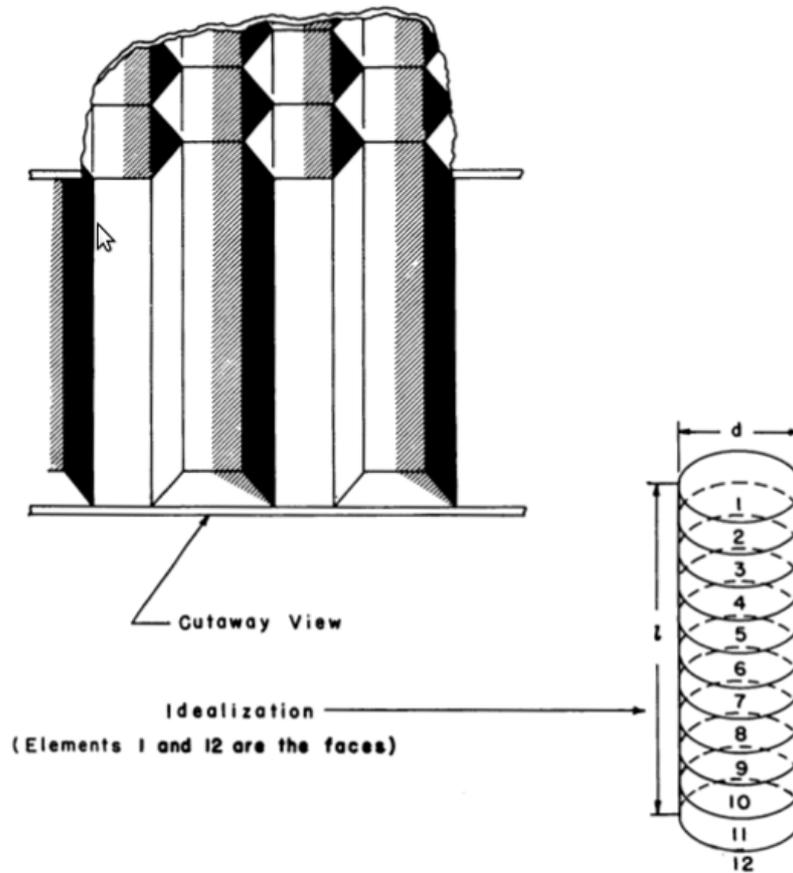


Fig 13.1: Pannello Honeycomb ed idealizzazione utilizzata. Da [4]

Il metodo consiste dunque nel dividere ogni cilindro in 10 parti di lunghezza pari a $l/10$. Si considera che le due facce, corrispondenti agli elemento 1 e 12, siano di temperatura nota e che nel core non ci sia apporto di calore. Come riferimento per la distanza degli elementi si prende il centro di essi, in tal modo la distanza sarà pari a $l/10$ per gli elementi da 2 a 11, e di $l/20$ per la distanza tra 1 e 2 e 11 e 12.

In base alle assunzioni viste otteniamo dunque tre equazioni:

Per l'elemento 2:

$$10 \frac{k\Delta A}{l} (2T_1 - 3T_2 + T_3) + \sigma \sum_{k=1}^{12} A_k \epsilon_k (G_{k,2} - \delta_{k,2}) T_k^4 = 0 \quad (13.14)$$

Per gli elementi da 3 a 10

$$10 \frac{k\Delta A}{l} (T_{m-1} - 2T_m - T_{m+1}) + \sigma \sum_{k=1}^{12} A_k \epsilon_k (G_{k,m} - \delta_{k,m}) T_k^4 = 0 \quad (13.15)$$

Per l'elemento 11

Cap.13 Analisi termica di un pannello sandwich

$$10 \frac{k\Delta A}{l} (T_{10} - 3T_{11} + 2T_{12}) + \sigma \sum_{k=1}^{12} A_k \epsilon_k (G_{k,11} - \delta_{k,11}) T_k^4 = 0 \quad (13.16)$$

Se definiamo una temperatura adimensionale \bar{T}_m si possono ridurre le equazioni in forma adimensionale

$$\bar{T}_m = \left(\frac{\sigma l A_l}{k \Delta A} \right)^{\frac{1}{3}} T_m \quad (13.17)$$

Quindi, se T_1 e T_{12} , il rapporto l/d (altezza/diametro celle) e le emissività sono date, allora possiamo risolvere le equazioni per la distribuzione di temperatura attraverso il pannello.

Poichè siamo all'equilibrio la quantità di calore rimossa dalla faccia fredda deve essere bilanciata da un apporto di calore sulla faccia calda. Il flusso netto si ottiene quindi, in funzione delle temperature adimensionali, come

$$Q_{12} = \left(\frac{k\Delta A}{\sigma l A_1} \right)^{1/3} \frac{k\Delta A}{l A_1} \left[20 (\bar{T}_{11} - \bar{T}_{12}) + \sum_{k=1}^{12} \frac{A_k}{A_1} \epsilon_k (G_{k,12} - \delta_{k,12}) \bar{T}_k^4 \right] \quad (13.18)$$

Scrivendo dunque la definizione per la conducibilità effettiva k_e

$$\begin{aligned} Q_{12} &= \frac{k_e}{l} (T_1 - T_{12}) \\ &= \left(\frac{k\Delta A}{\sigma l A_l} \right)^{\frac{1}{3}} \frac{k_e}{l} (\bar{T}_1 - \bar{T}_{12}) \end{aligned} \quad (13.19)$$

dove si è scritta sia la definizione generale che quella che utilizza le temperature adimensionalizzate. Sostituendo si ottiene quindi l'equazione dell'effettiva conducibilità termica.

$$k_e = \frac{Q_{12} l}{T_1 - T_{12}} \quad (13.20)$$

Traiamo dunque il grafico dell'andamento del gradiente di temperatura attraverso la direzione perpendicolare al piano medio del pannello dallo Swann [5] dove possiamo vedere due curve estreme per il rapporto l/d definito lambda.

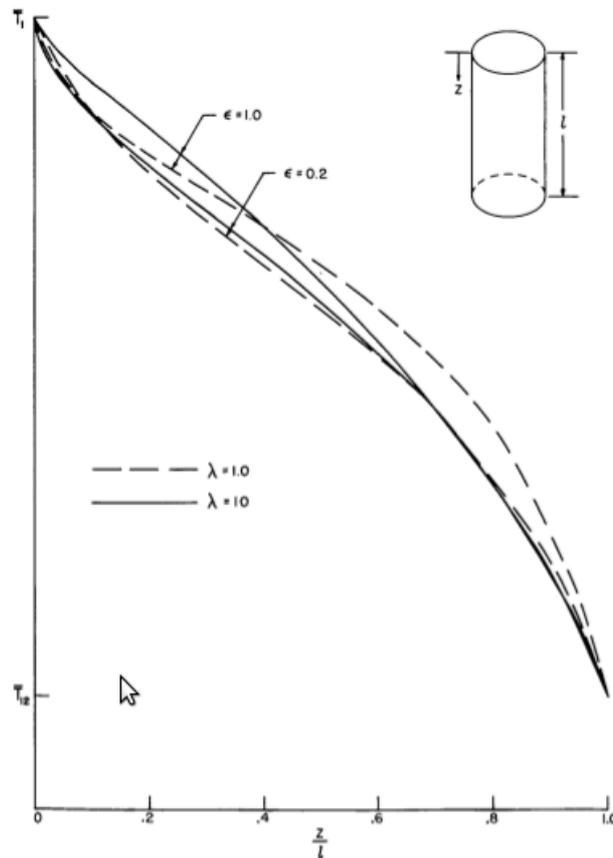


Fig 13.2: Gradiente di temperatura attraverso il pannello sandwich

Notiamo che il gradiente di temperatura alla faccia fredda è maggiore di quello risultante da una distribuzione lineare attraverso il pannello e conseguentemente un apporto maggiore di calore viene trasmesso alla faccia fredda per conduzione quando viene considerato l'irraggiamento.

13.3 Funzione analitica di trasferimento del calore

Si può trarre da [4] una funzione analitica in forma chiusa che permette di scrivere l'espressione del calore trasferito da una faccia all'altra in una piastra sandwich con core di tipo honeycomb. Esso sarà dato dalla somma del calore trasferito dalla conducibilità

$$\frac{k\Delta A}{l} (T_1 - T_{12}) \tag{13.21}$$

e dall'irraggiamento, funzione della geometria (λ) e dell'emissività (ϵ)

$$f(\lambda, \epsilon)\sigma (T_1^4 - T_{12}^4) = \left[0,664(\lambda + 0.3)^{-0.69} \epsilon^{1.63(\lambda+1)^{-0.89}} \sigma (T_1^4 - T_{12}^4) \right] \tag{13.22}$$

In questa equazione compare $f(\lambda, \epsilon)$ che ha il significato di un'emissività effettiva. Questa espressione è stata ricavata da Swann su una base di 1200 valori di calcolati con una deviazione

Cap.13 Analisi termica di un pannello sandwich

massima del 6.5 %.

Si ricava dunque l'importante rapporto

$$\frac{k_e A}{k \Delta A} = 1 + 0.664(\lambda + 0.3)^{-0.69} e^{1.63(\lambda+1) - 0.89} \left(\overline{T}_1^2 + \overline{T}_{12}^2 \right) (\overline{T}_1 + \overline{T}_{12}) \quad (13.23)$$

Espressione diretta del calore totale trasmesso rispetto a quello dovuto alla conduzione.

Dall'espressione precedente si ricava dunque una dipendenza del coefficiente di effettiva conduzione dalla temperatura, essa è dovuta alla non linearità della trasmissione per irraggiamento. Tramite la funzione MATLAB/OCTAVE indicata più avanti si può ricavare il grafico sottostante che indica k_e al variare della differenza di temperatura tra le due facce e della temperatura della faccia calda T_1 .

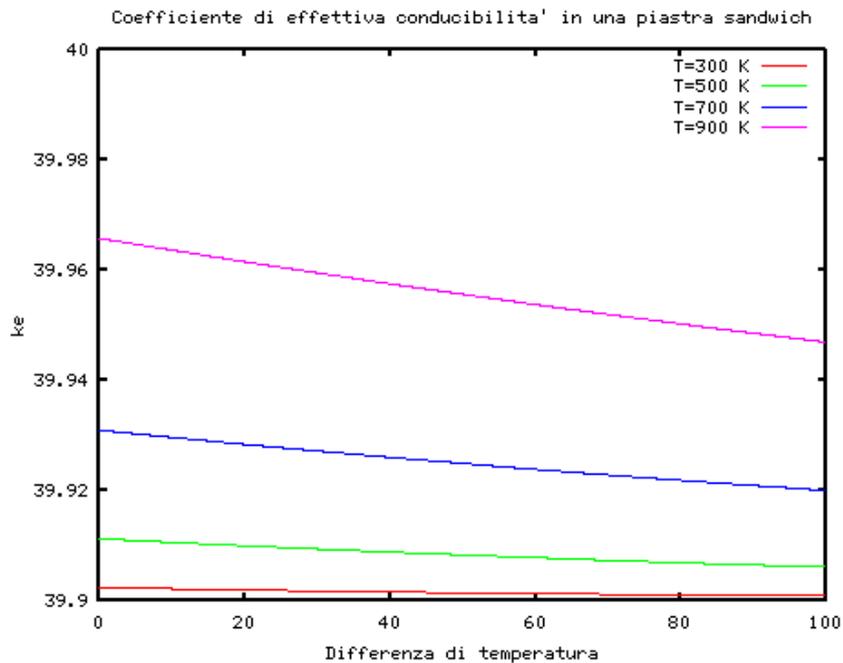


Fig 13.3: Variazione della conducibilità effettiva in funzione della differenza di temperatura ($\epsilon = 0.05, \lambda = 1$)

13.4 Effetto della geometria sull'effettiva conducibilità

Iterando la funzione `cond_effettiva` si ottiene il seguente grafico di dipendenza del coefficiente di conducibilità effettiva dalla geometria e dalle proprietà delle superfici. Notiamo che l'effetto di irraggiamento si fa notare principalmente su piccoli valori del rapporto lunghezza celle su diametro e per grandi valori del coefficiente di emissività.

Cap.13 Analisi termica di un pannello sandwich

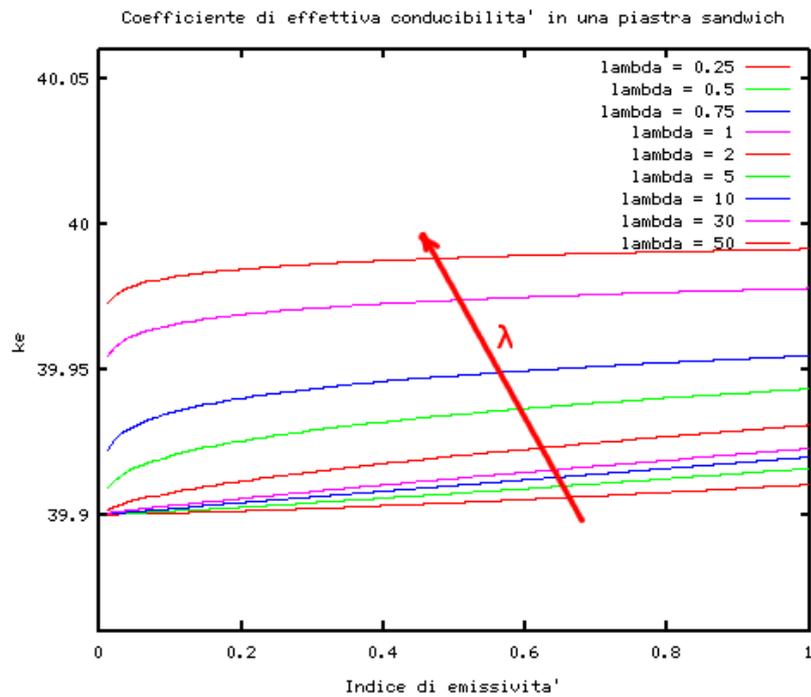


Fig 13.4: Effettiva conducibilità in funzione dell'emissività

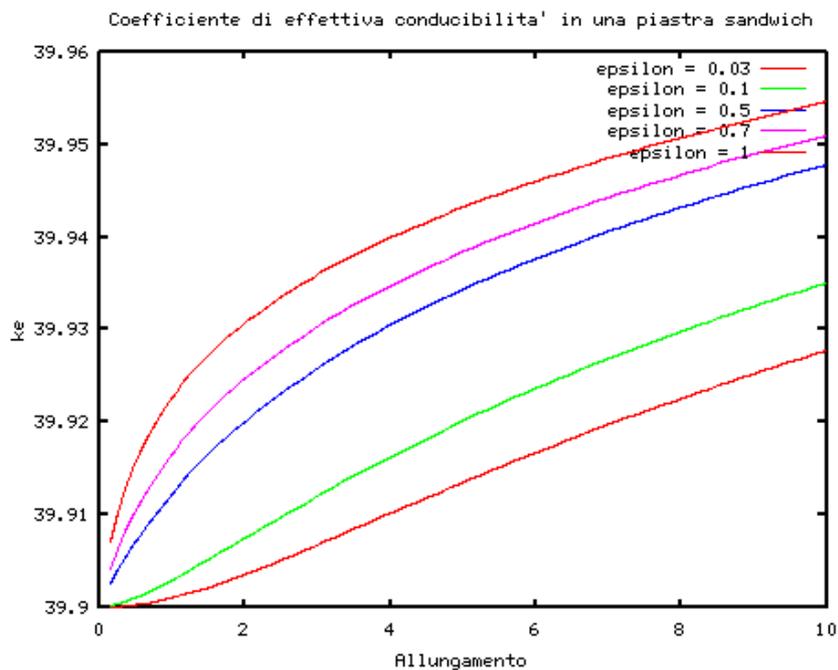


Fig 13.5: Effettiva conducibilità in funzione della geometria

13.5 Effetto della riflessione

Il seguente grafico mostra l'errore commesso nel supporre l'indice di assorbanza pari a 1 all'interno del core in funzione dell'allungamento.

Cap.13 Analisi termica di un pannello sandwich

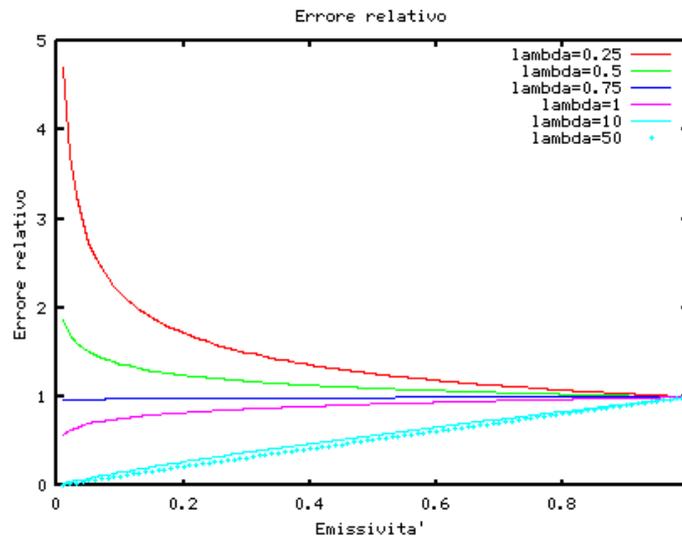


Fig 13.6: Errore relativo in funzione dei parametri

Le curve indicano che per alti valori di emissività e determinati valori di allungamento si possono ottenere risultati simili anche se si considera l'indice di assorbanza unitario. Ma per λ inferiori a 0.73 l'analisi senza riflessione sovrastima il calore trasmesso attraverso il pannello, ad esempio per un allungamento di 0.25 e un'emissività di 0.05 circa si ottiene un calore trasmesso del 260 % circa rispetto al reale.

Queste curve si ottengono dalle equazioni generali dell'analisi per elementi dove viene posto $F_{k,m} = G_{k,m}$

13.6 Differenziale di temperatura attraverso il core

Utilizzando i dati in nostro possesso e supponendo il materiale alluminio 3003 con una conducibilità termica di 180 W/mK si ottiene dal codice una conducibilità effettiva di

$$k_e = 3.59 \frac{W}{mK} \quad (13.24)$$

Quindi

$$R_{th} = \frac{h_{tot}}{k_e S_c} + 2 \frac{h_f}{k_{FR4} S_c} = \frac{0.0155}{3.59 \cdot 0.017956} + 2 \frac{0.0003}{0.30 \cdot 0.017956} = 0.352 K/W \quad (13.25)$$

$$\Delta T = R_{th} P_{in} = 0.352 * 17.305 = 6.09 K \quad (13.26)$$

13.7 Differenziale di temperatura tra il centro ed i bordi

Analogamente a quanto fatto per la piastra singola studiamo il differenziale di temperatura in funzione della resistenza termica tra il centro ed i bordi della tile in configurazione sandwich. Si assume il seguente modello per il core:

Cap.13 Analisi termica di un pannello sandwich

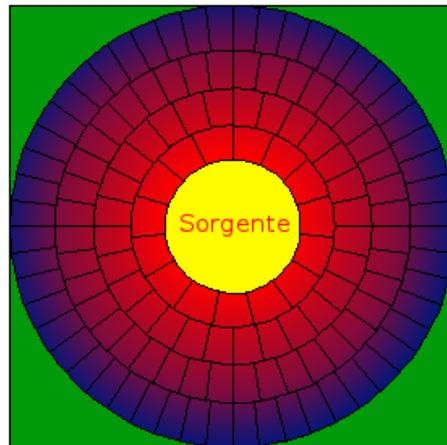


Fig 13.7: Modello core

Considerando un numero di elementini lineari di alluminio messi a raggiera rispetto alla sorgente lunghi 1 cm e di sezione pari all'altezza ($1.55 \cdot 10^{-2}$ m) per lo spessore di due lamine ($2 \cdot 10^{-4}$ m)

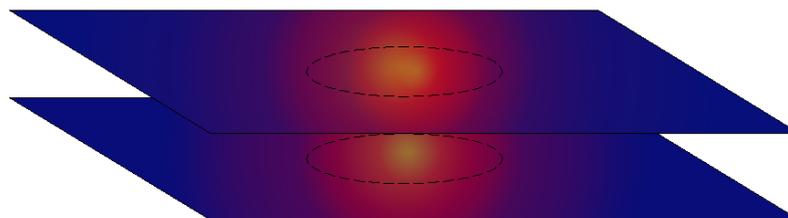


Fig 13.8: Modello equivalente per piastra sandwich

in parallelo alle due facce che ricadono nei valori già calcolati

Resistenze termiche skin (valori precedentemente calcolati)	
	[K/W]
Faccia in alluminio	1.81
Faccia in FR-4	782.36
Faccia con PCB (FR-4 + resina + celle)	1.62

	Resistenza faccia (int)		Resistenza Core		Resistenza totale	
Tile quadrata, pelli in alluminio	1.81		2.50		0.66	
Tile quadrata, pelli in FR-4	782.37		2.50		2.48	
Tile quadrata, pelli PCB	1.62		2.50		0.98	
Tile rettangolare, pelli in PCB	1.62	2.56	2.50	8.24	0.98	1.55

Cap.13 Analisi termica di un pannello sandwich

Il che porta ad un differenziale di temperatura in funzione della potenza fornita di

$$\Delta T = R_{CE} P_{in} \quad (13.27)$$

Tramite questo modello, applicando le formule già viste in precedenza, si ottengono

	Differenziale di temperatura		Configurazione minimo cubo	
Tile quadrata, pelli in alluminio	1.72		5.58	
Tile quadrata, pelli in FR-4	71.10		222.07	
Tile quadrata, pelli PCB	28.09		91.31	
Tile rettangolare, pelli in PCB	28.09	44.41	91.31	-

Valori che possono sembrare, nel caso di pelli in PCB, troppo elevati. Nella realtà questo è dovuto alle facce le quali non sono approssimabili semplicemente come uno strato di FR-4 ma contentendo circuiti in materiale termicamente più conduttivo (rame) la loro resistenza termica sarà sicuramente minore. A titolo di esempio si inserisce in parallelo alla faccia di FR-4 uno strato di Cu da $18\mu m$ ($R_{CE} = 26.34K/W$)

	Resistenza facce	Resistenza Totale	Diff. Temp	Minimo Cubo
Pelle PCB con strato in Cu	1.52	-	-	-
Pelle in FR-4 con strato in Cu	25.48	0.91	26.08	84.84

Come si può vedere la differenza tra centro e bordi di temperatura è scesa del 8 % con il solo inserimento di un semplice sottile strato in rame su entrambe le schede. Si consiglia quindi una modellizzazione termica più approfondita delle due skin.

Cap.14 Funzioni MATLAB / OCTAVE per l'analisi termica

14.1 Calcolo della conducibilità effettiva attraverso un pannello sandwich

Tramite la seguente funzione è possibile calcolare la conducibilità effettiva attraverso un pannello honeycomb in funzione delle temperature, della geometria del core e delle proprietà del materiale che lo costituiscono.

```
function [cond_e] = cond_effettiva (T1, delta, emis, lungh, spess,
diam, cond)

boltzmann = 5.67*10^(-8);           %costante di boltzmann

lambda=lungh/diam;                 %snellezza celle
A_tot=pi*(diam/2)^2;               %area cella
A_cond =(pi/4).*((diam^2)-((diam .- (2.*spess))^2)); %area conduzione

%calcolo temperature adimensionalizzate
T1_ad=(((boltzmann.*lungh.*A_tot)./(cond.*A_cond)).^(1./3)).*T1;
T12_ad=(((boltzmann.*lungh.*A_tot)./(cond.*A_cond)).^(1./3)).*(T1-
delta);

%calcolo rapporto ke*A/k*dA
ratio=1+0.664.*((lambda.+0.3).^(-0.69)).*(emis.^(1.63.*((lambda+1).^(-
0.89))))).*(T1_ad.^2+T12_ad.^2).*(T1_ad.+T12_ad);

cond_e=(ratio.*cond.*A_cond)./A_tot;

return
```

Cap.15 Test e risultati empirici

Oltre ai valori calcolati ed alle teorie ad essi legati, vengono presentati anche i risultati empirici ricavati in laboratorio da me in collaborazione con il dottorando Anwar Ali su alcune diverse tipologie di tile.

15.1 Test tramite simulatore solare

Il simulatore solare (presente all'interno del laboratorio di microelettronica del Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni del Politecnico di Torino) consiste in un generatore di radiazione luminosa la cui intensità è pari al valore della costante solare (si ricorda essere di 1367 W/m^2) riprodotta su una certa superficie. In pratica questo si realizza utilizzando una lampada molto potente la cui radiazione viene incanalata all'interno di un passaggio realizzato in cartone e rivestito di fogli di alluminio al suo interno. Questo fa sì che tutta la radiazione prodotta venga incanalata e resa parallela all'asse longitudinale dello stesso. Per migliorare l'omogeneità del flusso vi è all'interno alcuni fogli di materiale polimerico semitrasparente, che permette di distribuire meglio lungo il piano parallelo all'asse l'intensità luminosa.



Fig 15.1: Simulatore solare in funzionamento

15.2 L'importanza della corretta posizione

Attraverso i risultati di alcuni test preliminari condotti verso la metà del settembre 2013 si evince l'importanza del corretto posizionamento dell'oggetto di studio. Posizionare la tile ad una distanza inferiore a quella del riferimento oppure non mantenere il piano medio della tile normale all'asse longitudinale del simulatore solare, anche se di poco, implica un aumento od una riduzione di alcuni kelvin falsando tutti i risultati.

15.3 Differenza tra valore teorico ed empirico ed accettabilità dei risultati

Utilizzando le teorie descritte nel capitolo 73 “Analisi termica per oggetti orbitanti” ricaviamo la temperatura che dovrebbe raggiungere all'equilibrio termico un oggetto posto alla radiazione solare.

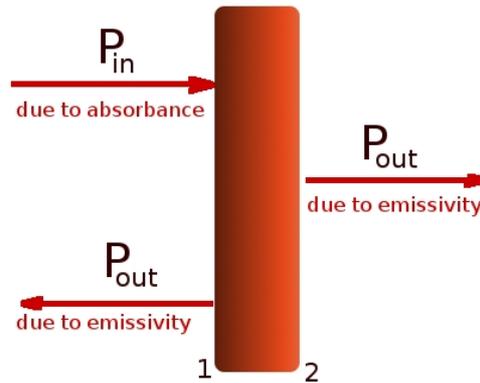


Fig 15.2: Bilancio assorbimento, emissività

Indicando con pedice 1 la faccia illuminata e pedice 2 la faccia fredda si scrivono le equazioni di bilancio

$$P_{in1} = P_{out1} + P_{out2} \quad (15.1)$$

dove

$$\begin{aligned} P_{in1} &= \alpha_1 J_s S \\ P_{out1} &= \epsilon_1 \sigma T_1^4 S \\ P_{out2} &= \epsilon_2 \sigma T_2^4 S \end{aligned} \quad (15.2)$$

La faccia illuminata riceve una percentuale della potenza fornita pari alla legge di Boltzmann per il proprio indice di assorbanza. All'equilibrio termico la somma delle potenze irradiate da entrambe le facce equivale la potenza in ingresso. Ipotizzando dunque lo stesso indice di assorbanza su entrambe le facce e che la differenza di temperatura sia trascurabile otteniamo che la temperatura raggiunta dovrebbe essere costante e pari a 331.35 K (58.2 °C). Se non si può trascurare la differenza degli indici di assorbanza allora possiamo ottenere il seguente grafico di temperatura in funzione del rapporto tra $\frac{\alpha_1}{\epsilon_1 + \epsilon_2}$

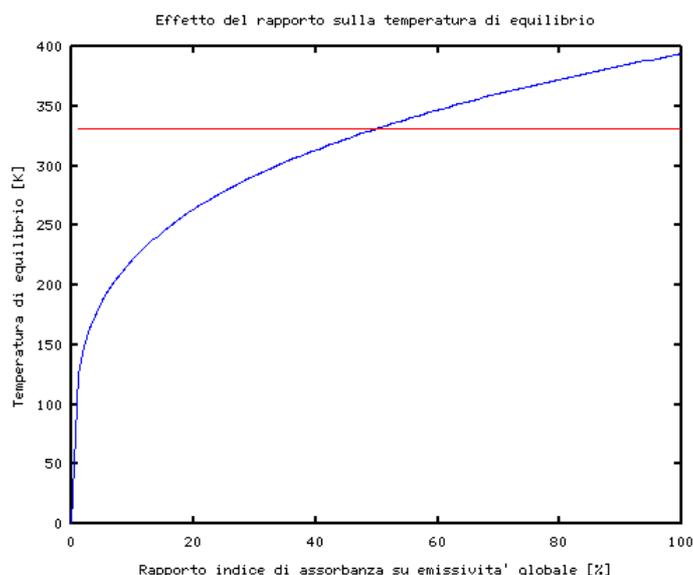


Fig 15.3: Effetto del rapporto sulla temperatura di equilibrio

Le differenze tra i valori ricavati dal modello e quelli misurati sono da attribuire, oltre agli errori di misura relativi al test, agli strumenti, alle letture, alla presenza di una forma di scambio termico non presa in considerazione dal modello ovvero la convezione. Inoltre per la tile di tipo 1B8 è da considerare la differenza tra la faccia esterna (con o senza celle solari) e la faccia interna (dove troviamo i componenti elettronici).

Questa considerazione è confermata dal fatto che la temperatura raggiunta dalla piastra in alluminio tende proprio a 331 K.

Nella seguente tabella vengono illustrati i rapporti tra l'indice di assorbanza e la somma degli indici di emissività nei tre casi: tile tipo 1B8 senza celle solari, tile tipo 1B8 con celle solari non attive, tile in alluminio e tile con celle solari. In quest'ultimo caso, a causa del differenziale di temperatura tra le due facce, il valore teorico si discosta lievemente dal valore pratico.

Rapporto tra indice di assorbanza e indice di emissività globale			
1B8 senza celle solari	1B8 con celle solari	Piastra in alluminio	Piastra in alluminio con celle solari
0.5287	0.5876	0.4979	0.9155

Come si può notare mentre la piastra in alluminio ha lo stesso indice di assorbanza e di emissività, si ha un'aumento del coefficiente di assorbanza nella scheda con celle solari montate (le celle solari sono più scure della scheda nuda).

15.4 Misura dell'indice di emissività ed assorbanza in aria libera

Questo esperimento consiste nel fornire calore all'oggetto fino a portarlo all'equilibrio termico. Mantenendo valido lo schema di figura 1 riscriviamo le equazioni di bilancio come

$$P_{in1} = P_{elettrica} \quad (15.3)$$

Ovvero supponendo inizialmente l'equivalenza tra gli indici di emissività nelle due facce ricaviamo la relazione

$$\epsilon = \frac{P_{in1}}{2\sigma T_2^4 S} \quad (15.4)$$

Adatta per la piastra in alluminio. Se invece poniamo ϵ_1 diverso da ϵ_2 ricaviamo la seguente relazione che ci fornisce la somma dei due indici

$$\epsilon_1 + \epsilon_2 = \frac{P_{in1}}{\sigma T_2^4 S} \quad (15.5)$$

Combinando questi risultati con quelli ottenuti dal simulatore solare otteniamo i valori degli indici di assorbanza ed emissività.

Il problema si presenta nel misurare l'effettiva potenza termica fornita al netto delle perdite per convezione. Questo problema si risolve effettuando il test all'interno di una campana del vuoto.

Indici di assorbanza misurati in aria libera			
1B8 senza celle solari	1B8 con celle solari	Piastra in alluminio	Piastra in alluminio con celle solari
0.6877	0.8450	0.1	0.778

15.5 Misura nel vuoto

Il test consiste nello scaldare la tile all'interno di un ambiente dove viene applicato il vuoto. Si tratta di una campana di vetro spesso 1 cm che poggia su uno strato di materiale elastomerico che permette l'aderenza del bordo e di non avere perdite per trafilazione. Una pompa produce una depressione di 1 bar all'interno della campana. Come sensori di temperatura non vengono utilizzate le termocoppie come per gli esperimenti in aria libera ma gli LM35.



Fig 15.4: L'AraMiS_C1 in fase di testing nel vuoto

Si tratta di sensori di temperatura di precisione i quali configurati correttamente possono dare una tensione proporzionale alla temperatura ($10 \text{ mV} / ^\circ\text{C}$) da $-50 \text{ }^\circ\text{C}$ a $150 \text{ }^\circ\text{C}$. Nel nostro caso viene utilizzato lo schema consigliato dal datasheet a cui viene aggiunto un condensatore da 100 nF in parallelo all'alimentazione. L'alimentazione utilizzata è di 10 V .

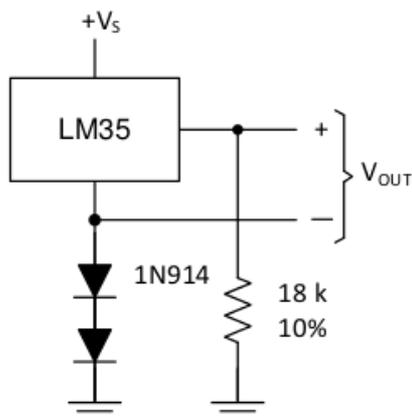


Fig 15.5: Applicazione del LM35



Fig 15.6: LM35

I valori vengono mandati ad una scheda di acquisizione USB 2009 OEM la quale tramite un

Cap.15 Test e risultati empirici

software scritto dal DET (Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni del Politecnico di Torino) permette una registrazione automatica dei valori di temperatura e tensione.

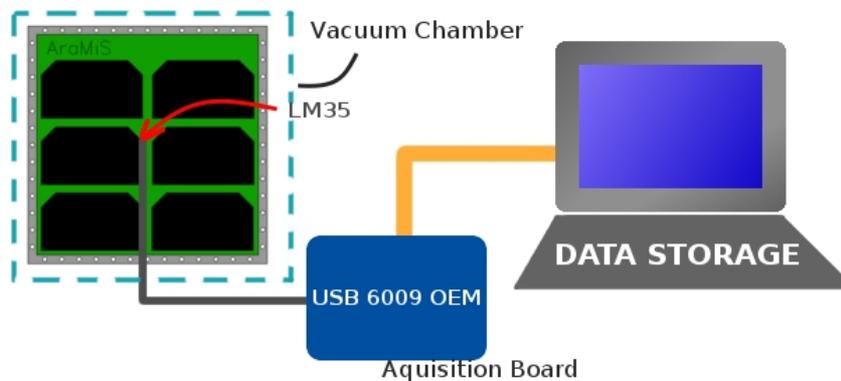


Fig 15.7: Linea di acquisizione dati

Test su AraMiS_C1

È stato effettuato un test per l'intero satellite dimostrativo in standard CubeSat (test eseguito per il calcolo della resistenza termica, ma utilizzabile anche per i nostri scopi) fornendo, tramite una resistenza da 2.2 ohm applicata all'interno della faccia superiore, una potenza di 10.99 W circa.

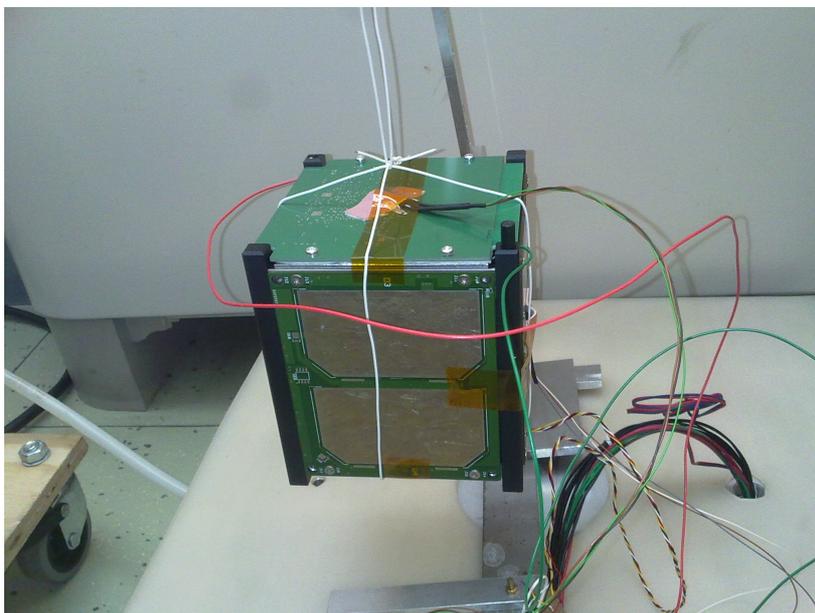


Fig 15.8: Posizionamento dei sensori su AraMiS_C1

I sensori posti rispettivamente sulla tile inferiore, su quella centrale e su quella superiore hanno rilevato

Ora	Sensore A [°C]	Sensore B [°C]	Sensore C [°C]
11:47	21.3	21	23.5

Cap.15 Test e risultati empirici

14:17	46.2	48.7	80.4
-------	------	------	------

Confermando (con un errore nell'ordine di 10^{-1}) la resistenza termica prevista da due lati paralleli.

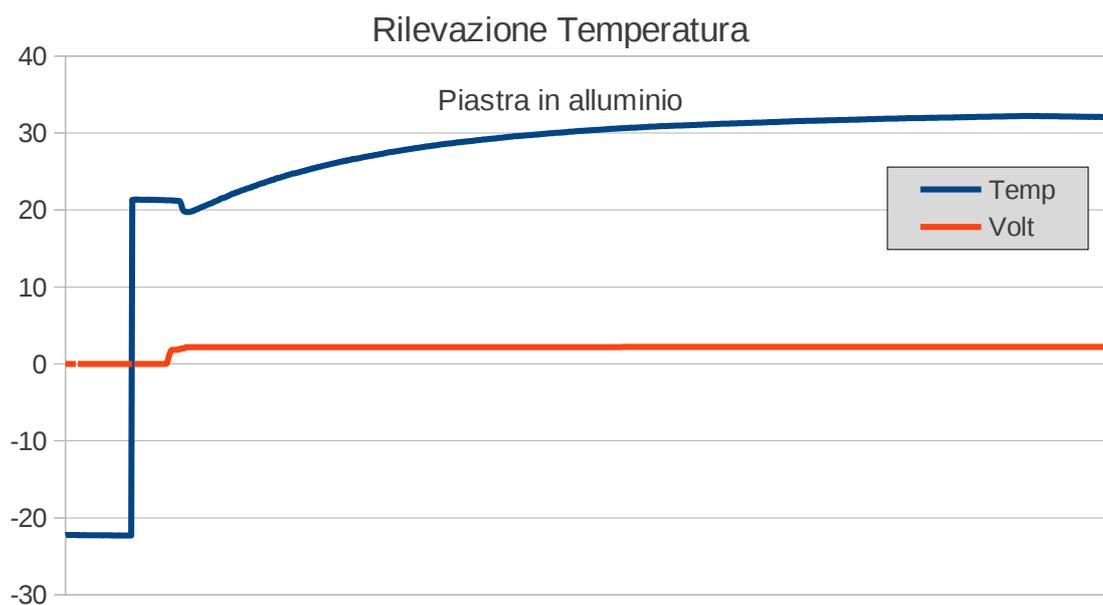
Applicando le stesse equazioni riprese nel paragrafo precedente, supponendo le superfici laterali isoterme, otteniamo un valore di emissività pari a 0.7443 in accordo con le misure in aria libera.

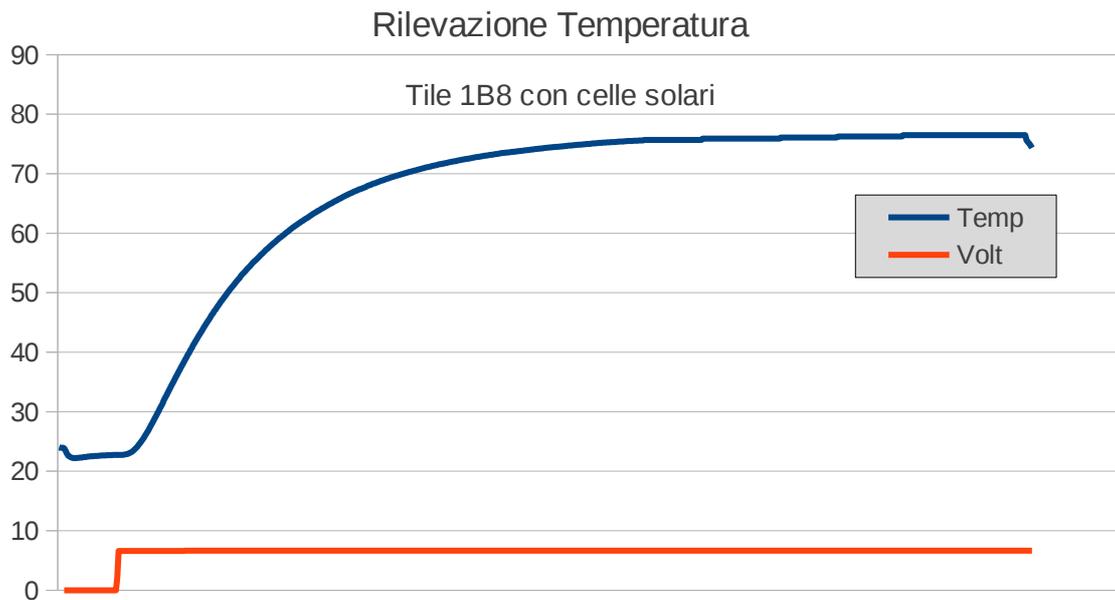
Test su tile per AraMiS

Le misure relative alle tile sono invece

Piastra in alluminio	Piastra in alluminio con celle solari	
0.0657	Faccia con PCB	Totale
	0.7057	0.7714

I grafici rilevati tramite la scheda di acquisizione sono





I quali mostrano come la temperatura rilevata sia effettivamente la temperatura di equilibrio. I valori quindi calcolati risultano in accordo e lievemente minori rispetto a quelli rilevati in presenza di convezione.

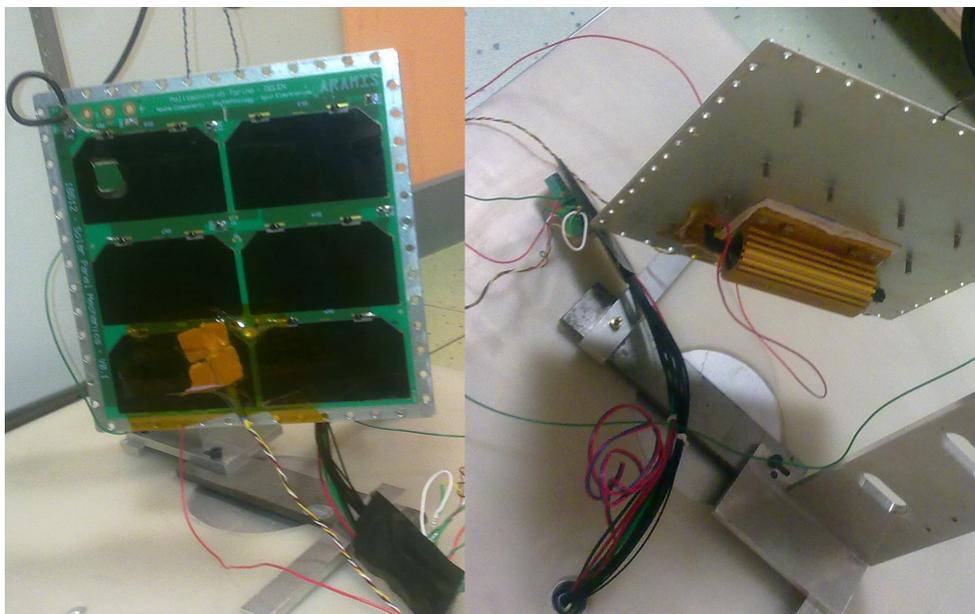


Fig 15.9: Posizionamento resistenza e sensori sulla tile di prova

15.6 Misure di resistenze termiche

Attraverso le metodologie descritte è possibile, posizionando accuratamente i sensori di temperatura, leggere i differenziali di temperatura tra centro e bordi e attraverso le facce delle tile in esame. In tal modo si verificano i valori ottenuti teoricamente.

Differenziali di temperatura rilevati durante gli esperimenti		
	Rilevato	Teorizzato
Attraverso la piastra in Alluminio	<1	$7 * 10^{-4}$
Tra il centro ed il bordo della piastra in alluminio	1.5	1.54
Attraverso la piastra sandwich	6	6.09
Attraverso la tile in alluminio con celle solari	8	1.83

Come si può notare nel caso di tile 1B8 in configurazione piastra in alluminio con celle solari montate, il differenziale di temperatura differisce dal modello teorico. Ciò può essere dovuto a valori differenti di conducibilità termica dei materiali rispetto a quelli teorizzati.

Cap.16 Conclusioni

All'interno di questa tesi vengono presentati i metodi per analizzare una tile per satelliti modulari AraMiS. Questi metodi sono stati utilizzati per studiare il comportamento dinamico e termico di alcune configurazioni esistenti.

In particolare sono state ricavate le pulsazioni naturali di tile basate sulla configurazione piastra in piana in alluminio e sandwich con core in honeycomb di cui ne abbiamo ricavato le grandezze equivalenti. Nella seconda parte invece ne sono state studiate le caratteristiche termiche tra cui le resistenze termiche, i corrispettivi differenziali di temperatura e gli indici di assorbanza ed emissività. Questi valori sono stati confermati da esperimenti in laboratorio condotti nel Dipartimento di Elettronica e Telecomunicazioni del Politecnico di Torino.

Entrambe le due divisioni sono state organizzate con elementi di teoria ed i risultati che ne conseguono. Inoltre vengono presentate alcune funzioni MATLAB/OCTAVE realizzate appositamente per facilitare il calcolo ed affinare il risultato. Alla fine i risultati ricavati in laboratorio vengono presentati e comparati con quelli calcolati.

I valori relativi a pulsazioni libere delle piastre (omogenee o sandwich) hanno trovato un ottimo riscontro con quelli ricavati in letteratura e si è proposto un metodo (che necessita di una misurazione pratica in laboratorio) per lo studio complessivo dei fenomeni dissipativi. I codici realizzati se usati correttamente possono dunque essere applicati a diversi casi, permettendo un'analisi ed un relativo confronto tra i dati rapido ed efficace.

Da un punto di vista critico del confronto tra i valori misurati ed i valori teorizzati si può notare come trascurare il fattore dell'irraggiamento nello studio di un honeycomb core, nelle configurazioni prese in considerazione, sia meno rilevante di quanto non lo sia una corretta modellizzazione delle skin. Il rapporto tra la conducibilità effettiva e quella dovuta alla sola conduzione risultava appunto 1.0013 circa apportando un debole aumento di calore trasmesso. Piuttosto, nella resistenza dal centro ai bordi si passa facilmente da differenziali di temperatura di 151 K a 26 K semplicemente approfondendo la modellizzazione delle skin. Questo comporta un errore nel modello ma non nel metodo che continua ad essere rigoroso.

Esclusa dunque questa grandezza, dipendente da un necessario approfondimento del modello, anche per i valori di resistenze termiche i test hanno presentato in quasi tutte le misurazioni valori non solo dello stesso ordine di grandezza di quelli teorizzati, ma addirittura nell'intorno stretto di essi.

Per i casi in cui questo non è avvenuto, si pensi ad esempio nella tile completa di scheda interna ed esterna, l'errore può consistere nei valori scorretti di conducibilità. Come si può ricavare in letteratura la stessa FR-4 varia da 0.3 W/mK a 0.81 W/mK fino ad arrivare anche ad 1 W/mK lungo il piano. Spessori e conducibilità degli adesivi termoconduttori e corretta aderenza delle celle alle schede porta, visti i grandi contributi che ne corrispondono, ad errori di valutazione di alcuni Kelvin.

In virtù della precisione dei valori ricavati e della velocità con il quale sono ripetibili grazie ai codici realizzati, considero la trattazione un buon punto di partenza per lo studio di analisi termica e strutturale di strutture anche più complesse di quelle teorizzate.

Cap.17 Bibliografia

1. Howard G. Allen "Analysis and design of structural sandwich panels"
2. S. Chakraverty "Vibration of plates"
3. J. N. Reddy "Mechanics of laminated composite plates and shells"
4. Robert T. Swann and Claud M. Pittman NASA TECHNICAL NOTE D-714 "Analysis of effective thermal conductivities of honeycomb-core and corrugated-core sandwich panels" 1961
5. Robert T. Swann "Heat Transfer and Thermal Stresses in Sandwich Panels. NACA TN 4349" 1958
6. M. Ruzzene "Vibration and sound radiation of sandwich beams with honeycomb truss core" dal Journal of Sound and Vibration 277 (2004) 741–763
7. J. N. Reddy "Theory and Analysis of Elastic Plates and Shells" Second Edition 2007
8. Tessler, Di Sciuva, Gherlone NASA/TP-2009-215561 "Refined Zigzag Theory for Laminated Composite and Sandwich Plates " 2009
9. Cell Components, produttore sandwich honeycomb in alluminio <http://www.cel.eu/33/>
10. Jiu Hui Wu , A. Q. Liu ,H. L. Chen "Exact Solutions for Free-Vibration Analysis of Rectangular Plates Using Bessel Functions " Journal of Applied Mechanics 2007
11. Anwar Ali, Leonardo Reyneri, Haider Ali, M. Rizwan Mughal "Design, Implementation and Thermal Modeling of Reconfigurable Magnetorquer System for the CubePMT Module of CubeSat Standard NanoSatellites"
12. Stefano Speretta, Leonardo M. Reyneri, Claudio Sansoé, Maurizio Tranchero, Claudio Passerone, Dante Del Corso "Modular Architecture for satellites" 2007
13. Simon Lee, Armen Toorian , Wenschel Lan, Riki Munakata "CubeSat Design Specification (CDS)" cubesat.org
14. Leissa "Vibration of Plates" NASA SP-160
15. Li Yongqiang, Jin Zhiqiang "Free flexural vibration analysis of symmetric rectangular honeycomb panels with SCSC edge supports " College of Science, Northeastern University, Shenyang 110004, China
16. K.Kantha Rao, K. Jayathirtha Rao, A.G.Sarwade, B.Madhava Varma "Bending Behavior of Aluminum Honey Comb Sandwich Panels "
17. İlke Aydinçak "Investigation of design and analyses principles of honeycomb structures"
18. Nast E. "On Honeycomb-Type Core Moduli", AIAA/ASME/AHS Adaptive Structures Forum, Kissimmee, FL, Apr. 7-10, 1997, Collection of Technical Papers, Pt. 2 (A97-24112 05-39)
19. ESDU 85037 "Natural frequencies of simply-supported sandwich panels with laminated face plates "
20. Birman, Bert "On the Choice of Shear Correction Factor in Sandwich Structures " Journal of Sandwich Structures and Materials , 2002