

Politecnico di Torino

I facoltà di Ingegneria

Corso di Laurea in Ingegneria Aerospaziale



Tesi di Laurea Triennale

Analisi strutturale dinamica mediante calcolo FEM di una piastra strumentata per Applicazioni Aerospaziali

Relatori

Prof. Giacomo Frulla

Prof. Leonardo Reyneri

Candidato

Lorenzo Longo

Indice

1	Teoria elastica lineare (o di Poisson-Kirchhoff delle piastre sottili)	6
1.1	Azioni interne ed equazioni differenziali di equilibrio	7
1.2	Relazioni fra momenti flettenti e curvature.....	9
1.3	Relazione fra momento torcente e deformazione tangenziale	10
1.4	Relazioni fra forze di taglio e pendenze della superficie inflessa.....	12
1.5	Frequenze naturali di piastre soggette a carichi trasversali.....	13
2	Impostazione del modello in Nastran	15
2.1	Convergenza dei risultati al crescere del numero di Elementi Finiti.....	15
3	Analisi della piastra semplicemente appoggiata	22
3.1	Influenza delle dimensioni	22
3.2	Cenni sulla teoria della piastra di Mindlin.....	29
3.3	Calcolo analitico con la teoria di Mindlin e confronto	32
4	Analisi della piastra incastrata lungo i bordi	38
5	Vibrazione di piastre in presenza di masse concentrate	41
5.1	Masse concentrate nel modello FEM.....	45
6	Confronto fra i modelli FEM 2D e 3D	49
6.1	Realizzazione dei modelli	50
6.2	Descrizione dei vincoli, analisi e confronto.....	53
7	Piastra con configurazione “realistica”	55
7.1	Realizzazione dei modelli	56
7.2	Analisi e confronto	62
7.3	Considerazioni sull’analisi della struttura	69
8	Introduzione di una massa nel modello “realistico”	71
8.1	Considerazioni sull’analisi della piastra strumentata.....	76
9	Analisi di una configurazione operativa	77
9.1	Modello FEM della configurazione indicata.....	77
9.2	Analisi e considerazioni	79
10	Conclusioni	81
11	Bibliografia	87

La tesi si inserisce in una attività in collaborazione con Il Dipartimento di Elettronica ed affronta una tematica strutturale associata ad un problema più generale della caratterizzazione di un componente multifunzionale.

Tutto il materiale utilizzato nella tesi è stato reperito in letteratura e/o autorizzato, in questo caso dal Prof. Reyneri del Dipartimento di Elettronica, per gli scopi a cui la stessa tesi fa riferimento.

L'utilizzo in originale od in copia di dati utilizzati nella tesi, o in parti di essa, è vietato e deve in ogni caso essere autorizzato per iscritto dall'autore e da tutti i relatori.

Ogni utilizzo diverso da quello previsto dalla tesi non è autorizzato.

Introduzione

La presente trattazione si inserisce all'interno di una collaborazione con il Dipartimento di Elettronica del Politecnico di Torino per l'approfondimento strutturale del comportamento di particolari elementi di impiego aerospaziale. Tali elementi di tipo modulare presentano particolari vantaggi per la realizzazione di componenti più complessi e multifunzionali che quindi richiedono una caratterizzazione più di dettaglio anche dal punto di vista dinamico-strutturale.

L'impiego di questi elementi permetterebbe l'abbattimento dei costi nella realizzazione di sistemi/componenti aerospaziali di scala ridotta grazie ad un'impostazione di tipo modulare basata sull'idea di un componente multifunzionale.

Si tratta di un elemento con il compito tanto di assolvere a funzioni prettamente strutturali quanto di fungere da piattaforma per ospitare i principali sottosistemi che comunemente trovano impiego sulla classe di configurazioni aerospaziali interessata. Trattandosi inoltre di strutture modulari, offrono la possibilità di essere assemblate in geometrie particolarmente vantaggiose, creando configurazioni adatte a svolgere funzioni anche totalmente differenti fra loro (dalla struttura per pannello solare a quella per ospitare telescopi ottici a quella, cubica, adatta per accogliere un generico payload).

Assume quindi un interesse concreto l'analisi strutturale dinamica della piastra in questione, per valutarne frequenze di vibrazione proprie e deformazioni modali nelle varie configurazioni di vincolo e di carico. Inoltre risulta importante definire le metodologie di simulazione il numero di elementi, l'effetto della tipologia di elemento utilizzato e la simulazione dei vincoli. La tesi quindi cerca di

definire in maniera operativa questi aspetti avendo come obiettivo quello di caratterizzare l'elemento dal punto di vista delle frequenze proprie di vibrazione.

Ci si è avvalsi, per tale scopo, del metodo di calcolo FEM tramite il codice di calcolo *Nastran* e dello strumento di pre/post processing *Patran*.

L'approccio seguito per affrontare questo problema prevede di creare un modello agli elementi finiti della piastra procedendo per gradi. Si è partiti dal massimo livello di esemplificazione possibile fino a giungere ad un modello che rappresentasse la struttura "reale", arricchendo e modificando opportunamente quello creato in precedenza.

Gli elementi di complicazione presenti nel componente studiato sono dovuti principalmente alla natura non esclusivamente strutturale dello stesso; essendo infatti predisposto ad ospitare svariati elementi circuitali, esso è composto da più strati di geometrie e materiali non uniformi.

Si è trattato inoltre il caso particolarmente interessante, studiato nel Capitolo 9, della struttura collegata nel proprio centro ad una massa costituita da un insieme motore-ruota di inerzia. Questa rappresenta, fra le configurazioni standard previste per la piastra strumentata, quella di massima sollecitazione.

Il lavoro svolto si è infine concluso con la realizzazione di un modello semplificato di una configurazione realistica a geometria cubica contenente la piastra analizzata in precedenza.

Per ogni stadio dell'analisi si sono trattate le condizioni al contorno più frequenti e si è cercato, laddove possibile, di confrontare i dati ottenuti dal calcolatore con quelli calcolati avvalendosi delle teorie descrittive di volta in volta più adatte. Si sono quindi commentati i risultati più importanti.

1 Teoria elastica lineare (o di Poisson-Kirchhoff delle piastre sottili)

La prima teoria descrittiva utilizzata è stata quella elastica lineare, anche conosciuta come teoria di Poisson-Kirchhoff delle piastre sottili, elaborata intorno al 1880, le cui ipotesi e limiti di validità ref[1] sono riportati di seguito.

Ipotesi sul materiale di cui è costituita la piastra:

- I. *il materiale da cui è formata la piastra è perfettamente elastico;*
- II. *il materiale segue la legge di Hooke ed ha le medesime costanti elastiche (modulo di elasticità, coefficiente di Poisson) per tutti i tipi di carico;*
- III. *il materiale della piastra è omogeneo ed isotropo;*
- IV. *lo spessore della piastra è costante;*
- V. *lo spessore è piccolo rispetto alle altre dimensioni della piastra;*

Ipotesi sul comportamento della piastra sotto carico:

- VI. *le fibre perpendicolari al piano medio della piastra, prima che si manifesti la flessione, rimangono perpendicolari al piano medio (deformato) dopo che si è manifestata la flessione;*
- VII. *la tensione normale al piano della piastra è trascurabile;*
- VIII. *gli spostamenti trasversali della piastra sono così piccoli da poter esprimere la curvatura in ogni assegnata direzione come la derivata seconda dello spostamento trasversale in quella direzione;*
- IX. *nel piano della piastra non agiscono deformazioni normali, ovvero non nascono deformazioni nel piano medio;*
- X. *il peso proprio della piastra è incluso nel carico agente sulla piastra stessa;*

1.1 Azioni interne ed equazioni differenziali di equilibrio

Al posto delle tensioni saranno considerate le azioni interne (risultanti delle tensioni), così come rappresentato in Figura 1. Si supponga che il piano X-Y coincida con il piano medio della piastra. Gli spostamenti trasversali del piano medio sono indicati con w e sono assunti positivi se diretti verso il basso. Le azioni interne sono le seguenti:

$$N_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x dz \quad N_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_y dz$$

$$T_{xy} = T_{yx} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{xy} dz$$

$$T_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{xz} dz \quad T_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{yz} dz$$

$$M_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x z dz \quad M_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_y z dz \quad M_{xy} = M_{yx} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{xy} z dz$$

In virtù dell'ipotesi IX si ha: $N_x = N_y = T_{xy} = T_{yx} = 0$

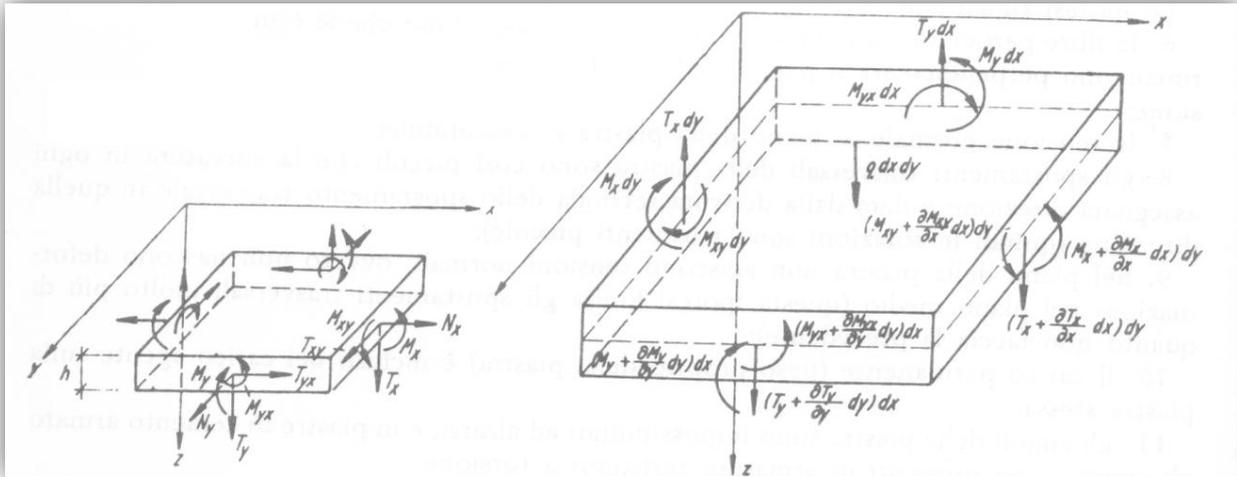


Figura 1 - Convenzioni e notazioni usate

Considerando ora un elemento di piastra di dimensioni $dx * dy$ possiamo scrivere le equazioni di equilibrio di tale elemento. Dall'equazione di equilibrio alla rotazione attorno all'asse X risulta:

$$\frac{\partial M_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial M_x}{\partial x} - T_x = 0$$

Dall'equilibrio alla rotazione attorno all'asse Y si ha:

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial M_y}{\partial y} + T_y = 0$$

Dall'equazione di equilibrio alla traslazione in direzione Z si ha:

$$\frac{\partial T_x}{\partial x} + \frac{\partial T_y}{\partial y} + q = 0$$

Dove q indica il carico che, nel caso generale, è funzione di X e di Y.

1.2 Relazioni fra momenti flettenti e curvature

In analogia con la teoria della flessione delle travi si ha che:

$$\varepsilon_x = \frac{z}{r_x} \quad \varepsilon_y = \frac{z}{r_y}$$

dove:

r_x, r_y - rappresentano i raggi di curvatura della piastra in direzione X e Y rispettivamente;

z - è la distanza dal piano medio della piastra del punto che si considera;

$\varepsilon_x, \varepsilon_y$ - sono le deformazioni in direzione X e Y rispettivamente nel punto considerato.

Ogni strato elementare parallelo al piano medio si trova in uno stato piano di tensione. Dalla legge di Hooke gli sforzi possono ricavarsi in funzione delle deformazioni nel modo seguente:

$$\sigma_x = \frac{E(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y)}{(1 - \nu^2)} \quad \sigma_y = \frac{E(\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x)}{(1 - \nu^2)}$$

Sostituendo nelle precedenti le espressioni delle deformazioni si ottiene:

$$\sigma_x = \frac{E}{(1 - \nu^2)} \left(\frac{1}{r_x} + \frac{\nu}{r_y} \right) z \quad \sigma_y = \frac{E}{(1 - \nu^2)} \left(\frac{1}{r_y} + \frac{\nu}{r_x} \right) z$$

Sostituendo le espressioni sopra scritte nelle equazioni di definizione dei momenti flettenti in funzione degli sforzi, ed integrando si ha:

$$M_x = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)} \left(\frac{1}{r_x} + \frac{\nu}{r_y} \right) \quad M_y = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)} \left(\frac{1}{r_y} + \frac{\nu}{r_x} \right)$$

Combinando si ottengono le seguenti espressioni per gli sforzi normali in funzione dei momenti flettenti:

$$\sigma_x = \frac{12M_x}{h^3} z \qquad \sigma_y = \frac{12M_y}{h^3} z$$

Considerando la rigidezza flessionale della piastra D , analoga della rigidezza flessionale EI di una trave, le equazioni dei momento possono scriversi come segue:

$$M_x = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \qquad M_y = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)$$

1.3 Relazione fra momento torcente e deformazione tangenziale

Dall'ipotesi *ix* discende che la flessione della piastra non genera deformazione nel piano medio, poiché si manifesta in piani ad esso paralleli. Per far fronte alla torsione la piastra deve fare affidamento alle tensioni tangenziali. I punti della piastra che sono posti fuori dal piano medio subiscono spostamenti sia in direzione Z che in direzione orizzontale. Siano u e v le componenti di spostamento di un punto in direzione X e Y rispettivamente. Questo punto sia supposto contenuto in un piano a distanza z dal piano medio. Si ha allora:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \qquad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

Dalla legge di Hooke segue che:

$$\tau_{xy} = \frac{E}{2(1 + \nu)} \gamma_{xy} = G \gamma_{xy}$$

Ovvero, tenendo conto dell'espressione di γ_{xy} :

$$\tau_{xy} = G \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

Consideriamo un punto situato a distanza z sotto il piano medio. In corrispondenza di spostamento e rotazione positivi si ha:

$$u = -z \frac{\partial w}{\partial x} \quad v = -z \frac{\partial w}{\partial y}$$

Riscriviamo dunque l'espressione di τ_{xy} nella forma seguente:

$$\tau_{xy} = -2G \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} z$$

Che, sostituita nell'espressione del momento torcente, integrando ed ordinando, permette di scrivere:

$$M_{xy} = -M_{yx} = -D(1 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

1.4 Relazioni fra forze di taglio e pendenze della superficie inflessa

Sostituendo le espressioni dei momenti flettenti M_x , M_y e del momento torcente M_{xy} nelle equazioni differenziali di equilibrio, si ottengono le espressioni delle forze di taglio in funzione delle pendenze della superficie deformata:

$$T_x = -D \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = -D \frac{\partial}{\partial x} \Delta w$$

$$T_y = -D \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = -D \frac{\partial}{\partial y} \Delta w$$

Con Δ operatore di Laplace.

Sostituendo le espressioni delle forze di taglio appena trovate nell'equazione di equilibrio alla traslazione in direzione Z si trova:

$$\boxed{\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{2(\partial^4 w)}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q}{D}}$$

Questa costituisce l'equazione differenziale della superficie inflessa della piastra, risultato fondamentale per ricavare l'equazione delle frequenze proprie di vibrazione.

1.5 Frequenze naturali di piastre soggette a carichi trasversali

I problemi dinamici sono strettamente connessi a quello della determinazione delle frequenze naturali. Una piastra, nella quale si manifesta una deformazione iniziale con assegnata velocità, dopo la rimozione del carico inizia a oscillare liberamente nel senso trasversale. Nell'equazione della piastra occorre tener conto delle forze d'inerzia:

$$\bar{m} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

dove:

$$\bar{m} = \frac{\gamma_0 h}{g_z}$$

rappresenta la massa della piastra riferita all'unità di superficie, si è inoltre indicato

con :

γ_0 il peso specifico del materiale

h lo spessore della piastra

g_z l'accelerazione di gravità (9,81 m/sec²)

L'equazione della superficie inflessa della piastra assume forma:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \frac{\bar{m}}{D} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0$$

Per la soluzione di questa equazione può assumersi:

$$w = w_0(x, y) \cos(\omega t + t_0)$$

dove ω rappresenta la frequenza circolare di vibrazione propria della piastra, e dipende dalla frequenza f e dal periodo t_k secondo le relazioni:

$$f = \frac{\omega}{2\pi} \quad t_k = \frac{2\pi}{\omega}$$

Sostituendo l'espressione di w nell'equazione della superficie deformata della piastra si ottiene:

$$\frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w_0}{\partial y^4} - \frac{\omega^2 \bar{m}}{D} w_0 = 0$$

La frequenza naturale, ovvero il valore del parametro ω in corrispondenza del quale l'equazione omogenea ha soluzione non nulla, può essere determinato calcolando gli auto-valori di tale equazione differenziale. Per una piastra rettangolare semplicemente appoggiata lungo il perimetro, gli auto-valori si ottengono sviluppando w in serie doppia di Fourier e risolvendo.

Si trova così:

$$\frac{\omega^2 \bar{m} a^4}{\pi^4 D} = (m^2 + \gamma^2 n^2)^2$$

da cui la frequenza naturale:

$$f_{mn} = \frac{\pi(m^2 + \gamma^2 n^2)}{2a^2} \sqrt{\frac{D}{\bar{m}}}$$

dove si è indicato con:

$\gamma = \frac{a}{b}$ rapporto fra le lunghezze dei lati della piastra

$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ rigidezza flessionale della piastra

m, n numero di semionde lungo la direzione x ed y.

2 Impostazione del modello in Nastran

L'analisi attraverso il metodo degli elementi finiti tramite l'uso del calcolatore è stato effettuato avvalendosi del codice di calcolo Nastran; mentre geometria, proprietà, materiale, carichi e condizioni al contorno sono state implementate grazie a Patran. In questa fase preliminare le simulazioni hanno interessato modelli di piastra generici; lo scopo principale era infatti quello di trovare una soluzione adatta per parametri di controllo quali il numero di nodi, il tipo di mesh da utilizzare le costanti da inserire e le metodologie di vincolo.

2.1 Convergenza dei risultati al crescere del numero di Elementi Finiti

Le prime simulazioni sono state eseguite per osservare quale comportamento assumano le frequenze proprie calcolate dal programma al variare del numero elementi finiti nel modello. Il risultato atteso era quello di una tendenza a convergere verso i valori più precisi al crescere del numero di nodi per lato.

Si è utilizzato, quindi, un modello avente le seguenti caratteristiche:

Modulo elastico $E=72000$ [MPa]

Coefficiente di Poisson $\nu = 0,3$

Densità $\rho=2810$ [kg/m³]

Dimensioni $a=b=165$ [mm]

Spessore $h=1,6$ [mm]

Che si riferiscono ad una piastra in Lega di Alluminio potenzialmente utilizzabile nei casi reali, alla quale sono stati applicati vincoli che possano rappresentare due casistiche reali. Il set di proprietà applicato è *Thin Shell*; i casi di vincolo simulati sono i seguenti:

1) *appoggio semplice* per tutti e quattro i lati, applicando un vincolo di tipo Translations $\langle T1,T2,T3 \rangle = \langle 0,0,0 \rangle$ a tutti i nodi sul perimetro della piastra, e lasciando libere le rotazioni.

2) *incastro*, applicando a tutti i nodi sul perimetro un vincolo di tipo Translations $\langle T1,T2,T3 \rangle = \langle 0,0,0 \rangle$ e Rotations $\langle R1,R2,R3 \rangle = \langle 0,0,0 \rangle$

Nota: Il vincolo di appoggio semplice simulato in questo paragrafo offre ottimi riscontri con la teoria con cui è effettuato il confronto. Esso è stato tuttavia modificato nel Paragrafo 6.2 per essere adattato al modello tridimensionale. Questo al fine di permettere le traslazioni, nel piano di giacenza della piastra, dei nodi vincolati. Si è verificato, tuttavia, che tale modifica non apporta variazioni apprezzabili al comportamento del modello Shell.

Il meshing è stato impostato secondo i seguenti parametri:

Finite Elements

Element shape: *Quad*

Mesher: *IsoMesh*

Topology: *Quad4*

L'analisi è stata infine effettuata impostando come Method: *Analysis Deck* ed il Solution Type: *Normal Modes*.

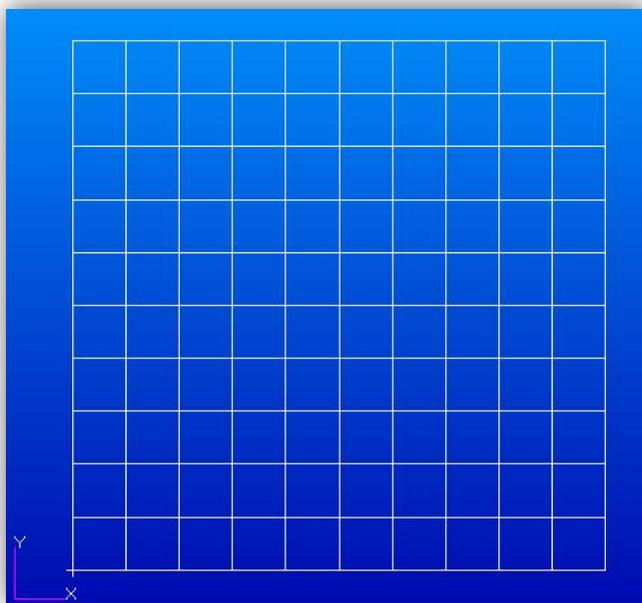


Figura 3 - Modello Patran, 11 nodi per lato

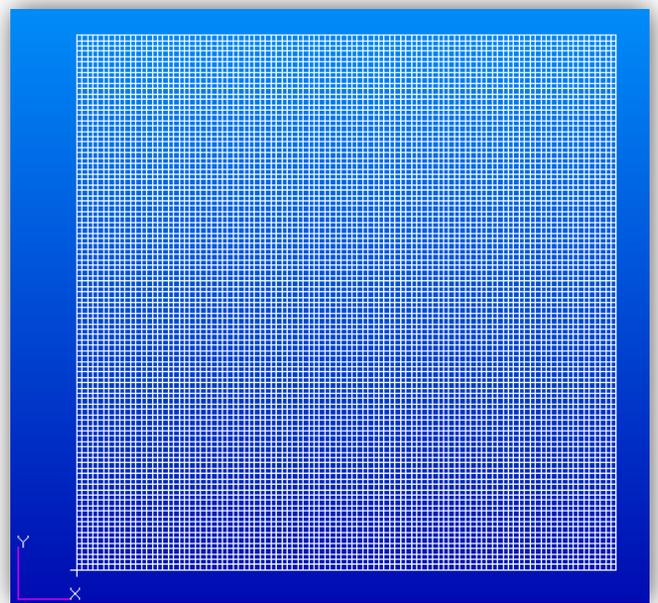


Figura 2 - Modello Patran, 101 nodi per lato

Di seguito si riportano una tabella riassuntiva dei parametri usati ed i risultati, espressi in Hz, ottenuti variando la mesh con i valori di 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90 e 100 elementi FEM per lato.

E [MPa]	ν	ρ [kg/m^3]	a[m]	h[m]
72000	0,33	2810	0,165	0,0016

Vincolo: S-S-S-S

Numero di elementi per lato										
MODO	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
1	281,51	283,99	284,52	284,68	284,74	284,75	284,75	284,74	284,72	284,71
2	699,96	708,95	711,01	711,73	712,04	712,18	712,25	712,28	712,29	712,29
3	699,96	708,95	711,01	711,73	712,04	712,18	712,25	712,28	712,29	712,29
4	1090,1	1123,7	1131,8	1134,7	1136	1136,7	1137	1137,2	1137,3	1137,4
5	1399,1	1417,1	1421,7	1423,3	1424,1	1424,5	1424,7	1424,8	1424,9	1424,9
6	1399,1	1417,1	1421,7	1423,3	1424,1	1424,5	1424,7	1424,8	1424,9	1424,9
7	1749	1816,7	1834,3	1840,9	1844	1845,5	1846,6	1847	1847,3	1847,5
8	1749	1816,7	1834,3	1840,9	1844	1845,5	1846,6	1847	1847,3	1847,5
9	2343,5	2407,2	2415,1	2418	2419,4	2420,2	2420,6	2420,8	2421	2421,1
10	2378	2407,2	2415,1	2418	2419,4	2420,2	2420,6	2420,8	2421	2421,1

Tabella 1 - Comportamento del modello al variare della densità di elementi finiti; frequenze [Hz]

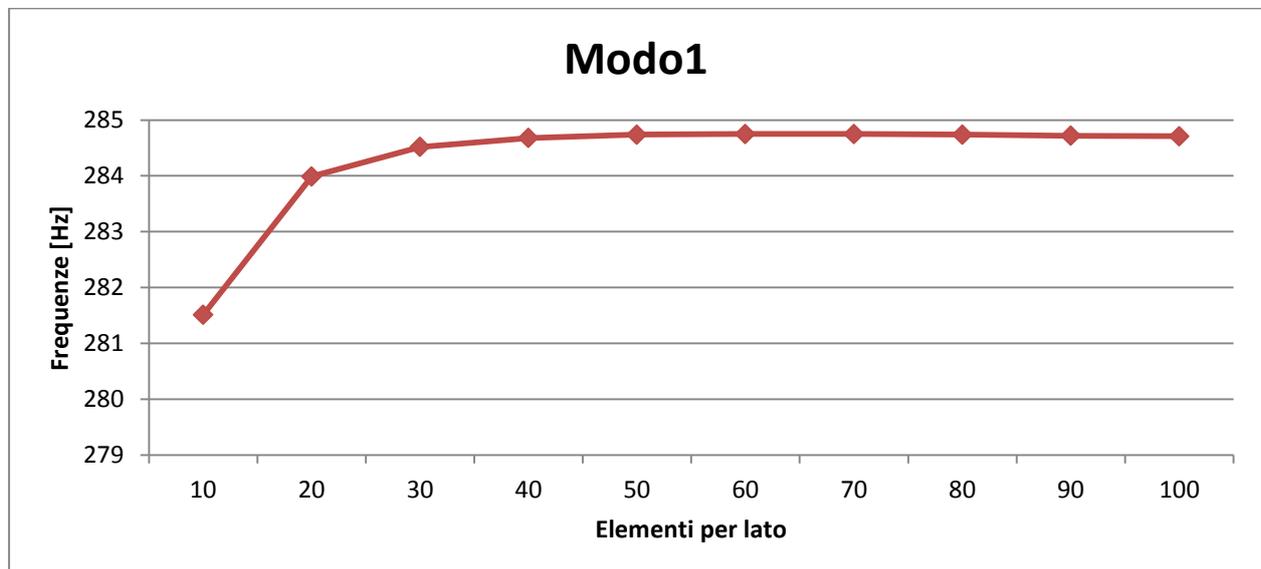


Grafico 1 - Frequenze al variare della densità di elementi finiti, Vincolo: S-S-S-S

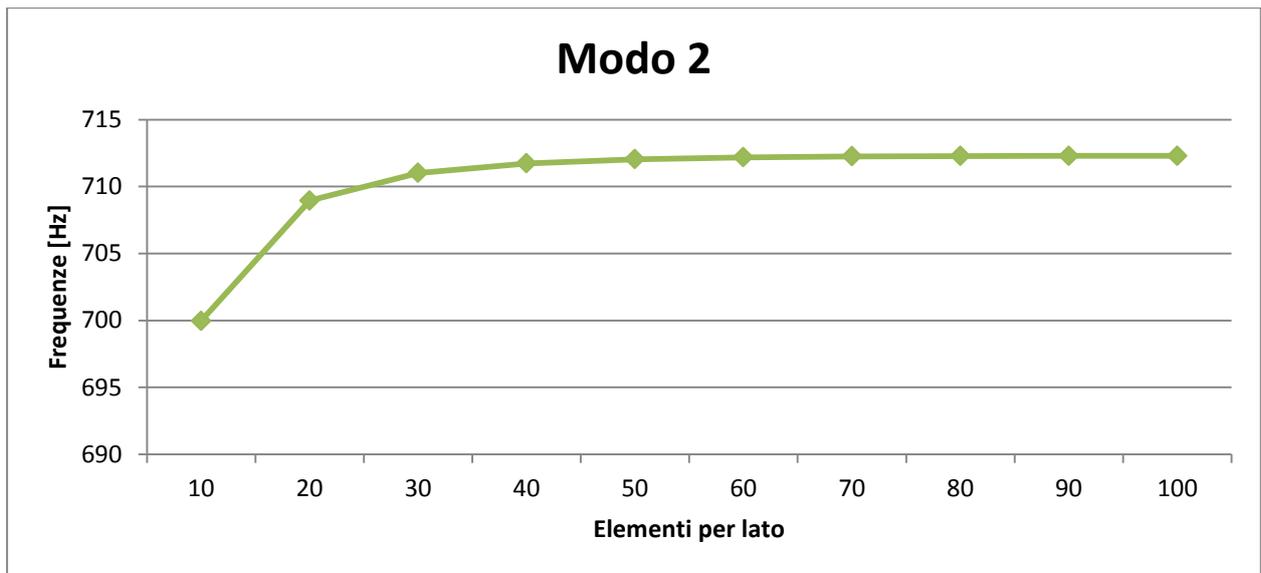


Grafico 2 - Frequenze al variare della densità di elementi finiti, Vincolo: S-S-S-S

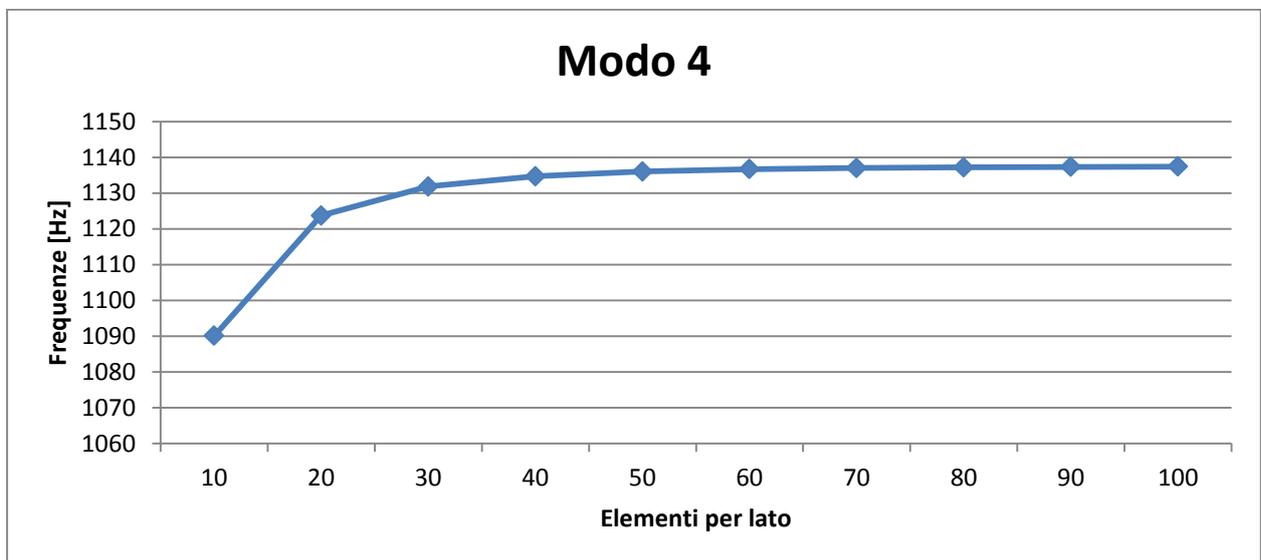


Grafico 3 - Frequenze al variare della densità di elementi finiti, Vincolo: S-S-S-S

Vincolo: C-C-C-C

Numero di elementi per lato										
MODO	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
1	510,18	517,16	518,93	519,58	519,9	520,07	520,17	520,24	520,29	520,32
2	1036,1	1051,8	1056,5	1058,3	1059,1	1059,6	1059,9	1060,1	1060,2	1060,3
3	1036,1	1051,8	1056,5	1058,3	1059,1	1059,6	1059,9	1060,1	1060,2	1060,3
4	1485	1532,9	1548,5	1554,6	1557,5	1559,1	1560,1	1560,7	1561,1	1561,4
5	1862,9	1883,5	1891,8	1895,1	1896,7	1897,6	1898,1	1898,4	1898,7	1898,8
6	1873,1	1893,7	1901,5	1904,6	1906	1906,8	1907,3	1907,6	1907,9	1908
7	2250,3	2323,5	2352,7	2364,4	2370	2373,2	2375,1	2376,3	2377,2	2377,8
8	2250,3	2323,5	2352,7	2364,4	2370	2373,2	2375,1	2376,3	2377,2	2377,8
9	2914,4	3011,5	3023,7	3028,6	3030,9	3032,2	3033	3033,5	3033,9	3034,1
10	2989,2	3011,5	3023,7	3028,6	3030,9	3032,2	3033	3033,5	3033,9	3034,1

Tabella 2 - Comportamento del modello al variare della densità di elementi finiti; frequenze [Hz]

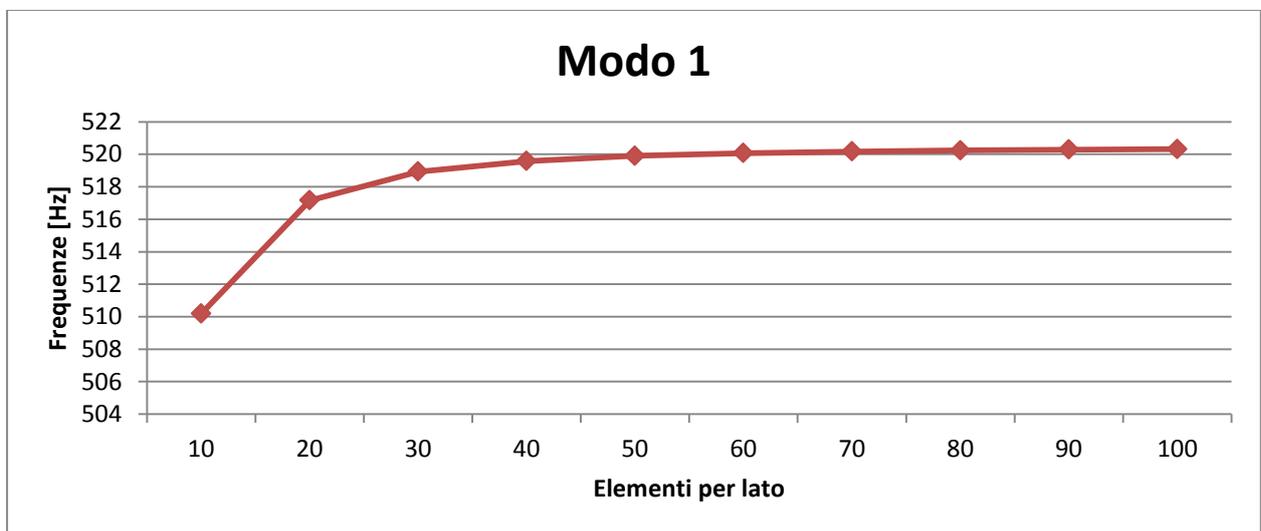


Grafico 4 – Comportamento del modello al variare della densità di elementi finiti, Vincolo: C-C-C-C

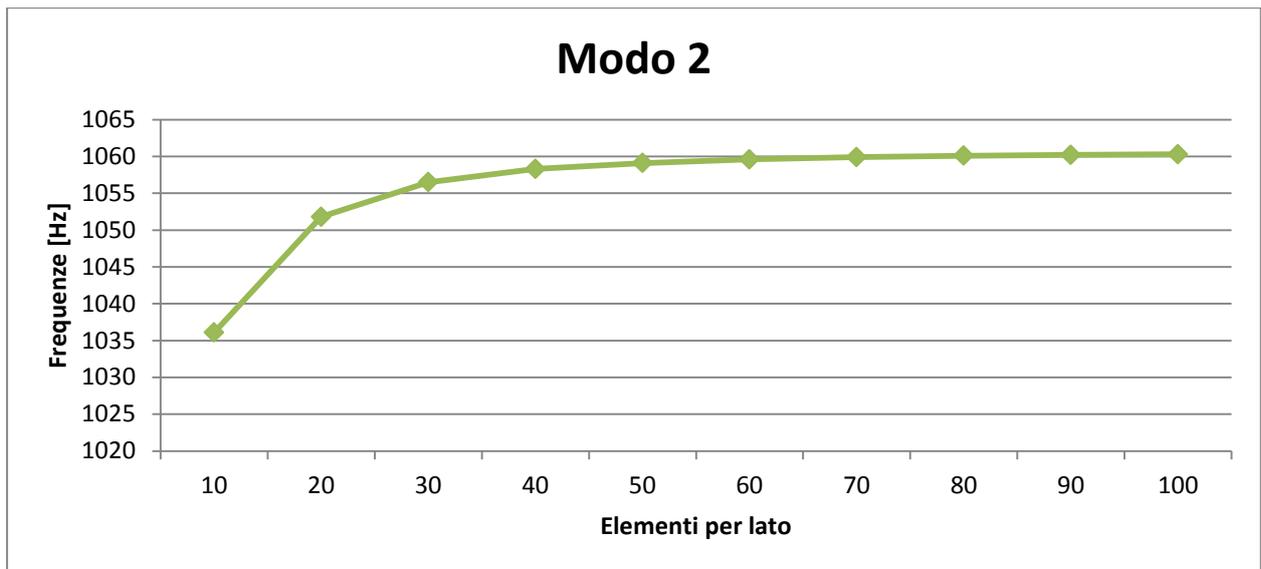


Grafico 5 - Comportamento del modello al variare della densità di elementi finiti, Vincolo: C-C-C-C

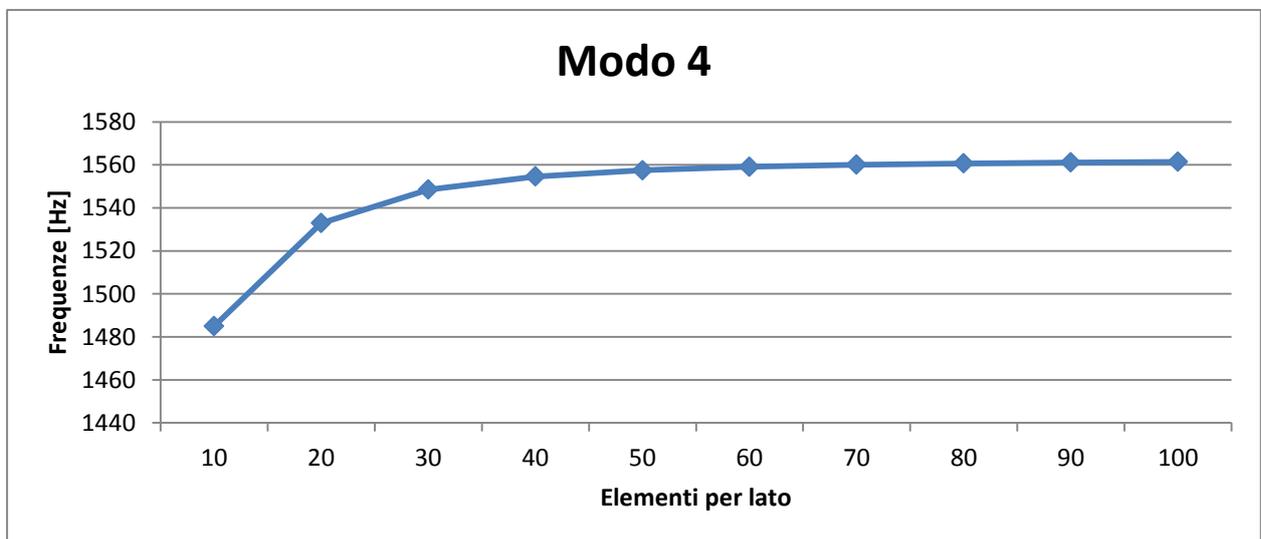


Grafico 6 - Comportamento del modello al variare della densità di elementi finiti, Vincolo: C-C-C-C

Nei Grafici 1 - 6 si sono riportati i valori delle prime tre frequenze naturali della piastra per i due casi di vincolo proposti. In ascisse si leggono il numero di nodi per lato; in ordinate i valori delle frequenze.

Dagli andamenti si nota esattamente la tendenza attesa: una convergenza dei valori verso frequenze “esatte” al crescere del numero di Elementi Finiti.

Questo risultato ha una duplice importanza: ci mette in guardia per quanto concerne la scelta di una mesh troppo rada, probabilmente caratterizzata da un alto grado di errore; e tuttavia ci informa che infittire a dismisura il reticolo non porterebbe alcun beneficio, ed anzi renderebbe le analisi sempre meno agevoli da manipolare, nonché pesanti a livello di risorse richieste al calcolatore.

3 Analisi della piastra semplicemente appoggiata

Le prove successive sono state effettuate per verificare che i calcoli eseguiti tramite metodo FEM, per una piastra vincolata con appoggio semplice lungo il bordo, offrissero una buona corrispondenza con quelli, analitici, eseguiti applicando la teoria delle piastre di Kirchhoff. Allo stesso tempo si è approfittato delle simulazioni fatte per osservare l’insorgere di problemi legati ai limiti di validità di tale teoria.

3.1 Influenza delle dimensioni

Un importante passo per capire il comportamento dinamico delle piastre è quello di valutarne le frequenze naturali in relazione alle loro dimensioni. In questo paragrafo si sfrutterà la teoria di Kirchhoff per calcolare analiticamente tali valori

variando le dimensioni di lati e spessori, mantenendo tuttavia un valore di *aspect ratio costante* (qui inteso come rapporto fra dimensione verticale ed orizzontale della piastra).

I casi trattati sono:

	lato1	lato2	h
a	0.32	0.32	0.0032
b	0.16	0.16	0.0016
c	0.08	0.08	0.0008

Le caratteristiche del materiale sono invariate rispetto a quelle introdotte nel paragrafo precedente. La mesh è applicata in modo tale da mantenere la densità di elementi finiti per unità di superficie costante.

MOD0	m	n	a	a_FEM_100	b	b_FEM_50	c	c_FEM_25
1	1	1	151.97	151.37	303.94	302.77	607.88	604.69
2	1	2	379.93	378.7	759.85	757.15	1519.7	1510.6
3	2	1	379.93	378.7	759.85	757.15	1519.7	1510.6
4	2	2	607.88	604.67	1215.76	1207.9	2431.53	2400.7
5	1	3	759.85	757.57	1519.70	1514.3	3039.41	3020
6	3	1	759.85	757.57	1519.70	1514.3	3039.41	3020
7	2	3	987.81	982.17	1975.62	1960.6	3951.23	3887
8	3	2	987.81	982.17	1975.62	1960.6	3951.23	3887
9	3	3	1367.73	1287.2	2735.47	2572.6	5470.94	5129.7
10	3	3	1367.73	1287.2	2735.47	2572.6	5470.94	5129.7

Tabella 3 - Influenza delle dimensioni, Appoggio [Hz]

Emerge da questo confronto analitico come, per un dato *aspect ratio*, i valori di frequenza varino linearmente con la dimensione della piastra. In particolare si osserva un dimezzamento dei valori stessi al raddoppiare delle lunghezze di lati e spessori.

Comportamento al variare dello spessore

Lo scopo delle prove che seguono, è duale: da un lato si intende completare il quadro offerto dal paragrafo precedente, utilizzando una geometria simile a quella del “caso b” ed utilizzando questa volta lo spessore come parametro di controllo; in secondo luogo si intende verificare l’insorgenza di problemi legati ai limiti di validità della teoria elastica lineare. Il risultato atteso a tal proposito è quello di un errore percentuale (inteso come lo scarto fra le frequenze calcolate analiticamente e quelle stampate dal calcolatore, supposte “esatte”) crescente al crescere dello spessore. A tal proposito si sono effettuate una serie di simulazioni con Nastran riportando le prime 6 frequenze naturali (il programma restituisce di default i dati relativi ai primi 10 modi di vibrazione propri della piastra). Si sono poi evidenziati per ogni frequenza errore ed errore percentuale (Tabelle:4-12).

Parametri materiale			Dimensioni	
E[MPa]	ν	$\rho \left[\frac{kg}{m^3} \right]$	a[m]	b[m]
73000	0,3	2810	0.16	0.16

Element shape	Mesher	Topology	Solution Type
Quad	IsoMesh	Quad4	Normal Modes

Boundary Conditions: *Appoggio Semplice*

MODO	m	n	Kirchhoff	Nastran	ERRORE	ERRORE%
1	1	1	178,30	177,89	0,410713	0,230348
2	1	2	445,75	444,84	0,911782	0,204549
3	2	1	445,75	444,84	0,911782	0,204549
4	2	2	713,2	710,48	2,722851	0,381778
5	1	3	891,5	889,82	1,683564	0,188845
6	3	1	891,5	889,83	1,673564	0,187724
7	2	3	1158,95	1153,8	5,154633	0,444766
8	3	2	1158,95	1153,8	5,154633	0,444766
9	3	3	1604,71	1512,5	92,20642	5,745999
10	3	3	1604,71	1512,5	92,20642	5,745999

Tabella 4 - h=1mm; frequenze naturali [Hz]

MODO	m	n	Kirchhoff	Nastran	ERRORE	ERRORE%
1	1	1	356,60	354,83	1,771426	0,496752
2	1	2	891,5	887,65	3,853564	0,432254
3	2	1	891,5	887,65	3,853564	0,432254
4	2	2	1426,4	1415,9	10,5057	0,736516
5	1	3	1783	1775,4	7,607128	0,426646
6	3	1	1783	1775,4	7,607128	0,426646
7	2	3	2317,9	2298,4	19,50927	0,841675
8	3	2	2317,9	2298,4	19,50927	0,841675
9	3	3	3209,41	3015,4	194,0128	6,045119
10	3	3	3209,41	3015,4	194,0128	6,045119

Tabella 5 - h=2mm; frequenze naturali [Hz]

MODO	m	n	Kirchhoff	Nastran	ERRORE	ERRORE%
1	1	1	534,9	530,55	4,352139	0,813633
2	1	2	1337,26	1327,5	9,755346	0,729505
3	2	1	1337,26	1327,5	9,755346	0,729505
4	2	2	2139,61	2113,8	25,80855	1,206228
5	1	3	2674,51	2653,6	20,91069	0,781851
6	3	1	2674,51	2653,6	20,91069	0,781851
7	2	3	3476,86	3428,4	48,4639	1,393897
8	3	2	3476,86	3428,4	48,4639	1,393897
9	3	3	4814,12	4500,9	313,2192	6,506263
10	3	3	4814,12	4500,9	313,2192	6,506263

Tabella 6 - h=3mm; frequenze naturali [Hz]

MODO	m	n	Kirchhoff	Nastran	ERRORE	ERRORE%
1	1	1	713,20	704,94	8,262851	1,158556
2	1	2	1783	1763,7	19,30713	1,082841
3	2	1	1783	1763,7	19,30713	1,082841
4	2	2	2852,81	2802,7	50,11141	1,756562
5	1	3	3566,01	3522	44,01426	1,23427
6	3	1	3566,01	3522,4	43,61426	1,223053
7	2	3	4635,82	4539,8	96,01853	2,071232
8	3	2	4635,82	4539,8	96,01853	2,071232
9	3	3	6418,83	5961,5	457,3257	7,124756
10	3	3	6418,83	5961,5	457,3257	7,124756

Tabella 7 - h=4mm; frequenze naturali [Hz]

MODO	m	n	Kirchhoff	Nastran	ERRORE	ERRORE%
1	1	1	891,5	877,96	13,54356	1,519182
2	1	2	2228,76	2195,8	32,95891	1,478801
3	2	1	2228,76	2195,8	32,95891	1,478801
4	2	2	3566,01	3481,3	84,71426	2,375601
5	1	3	4457,52	4378,2	79,31782	1,779417
6	3	1	4457,52	4378,2	79,31782	1,779417
7	2	3	5794,77	5629	165,7732	2,860736
8	3	2	5794,77	5629	165,7732	2,860736
9	3	3	8023,53	7390,9	632,6321	7,884708
10	3	3	8023,53	7390,9	632,6321	7,884708

Tabella 8 - h=5mm; frequenze naturali [Hz]

MODO	m	n	Kirchhoff	Nastran	ERRORE	ERRORE%
1	1	1	1069,8	1049,5	20,30428	1,897943
2	1	2	2674,51	2623,3	51,21069	1,914769
3	2	1	2674,51	2623,3	51,21069	1,914769
4	2	2	4279,22	4148,4	130,8171	3,057034
5	1	3	5349,02	5220,1	128,9214	2,410186
6	3	1	5349,02	5221,4	127,6214	2,385883
7	2	3	6953,73	6693,1	260,6278	3,74803
8	3	2	6953,73	6693,1	260,6278	3,74803
9	3	3	9628,24	8783,3	844,9385	8,775629
10	3	3	9628,24	8783,3	844,9385	8,775629

Tabella 9 - h=6mm; frequenze naturali [Hz]

MODO	m	n	Kirchhoff	Nastran	ERRORE	ERRORE%
1	1	1	1248,11	1219,6	28,50499	2,283862
2	1	2	3120,26	3045,4	74,86247	2,399236
3	2	1	3120,26	3045,4	74,86247	2,399236
4	2	2	4992,42	4802,9	189,52	3,796154
5	1	3	6240,53	6045,5	195,0249	3,125137
6	3	1	6240,53	6045,7	194,8249	3,121932
7	2	3	8112,68	7729,3	383,3824	4,725717
8	3	2	8112,68	7729,3	383,3824	4,725717
9	3	3	11232,94	10134	1098,945	9,783231
10	3	3	11232,94	10134	1098,945	9,783231

Tabella 10 - h=7mm; frequenze naturali [Hz]

MODO	m	n	Kirchhoff	Nastran	ERRORE	ERRORE%
1	1	1	1426,41	1388,1	38,3057	2,68547
2	1	2	3566,01	3462	104,0143	2,916821
3	2	1	3566,01	3462	104,0143	2,916821
4	2	2	5705,62	5443,9	261,7228	4,587103
5	1	3	7132,03	6852,8	279,2285	3,915135
6	3	1	7132,03	6856	276,0285	3,870267
7	2	3	9271,64	8735,4	536,2371	5,783629
8	3	2	9271,64	8735,4	536,2371	5,783629
9	3	3	12837,65	11438	1399,651	10,90271
10	3	3	12837,65	11438	1399,651	10,90271

Tabella 11 - h=8mm; frequenze naturali [Hz]

MODO	m	n	Kirchhoff	Nastran	ERRORE	ERRORE%
1	1	1	1604,71	1555	49,70642	3,09754
2	1	2	4011,77	3872,5	139,266	3,47144
3	2	1	4011,77	3872,5	139,266	3,47144
4	2	2	6418,83	6070,6	348,2257	5,425068
5	1	3	8023,53	7640,4	383,1321	4,775105
6	3	1	8023,53	7644,9	378,6321	4,71902
7	2	3	10430,59	9709,6	720,9917	6,91228
8	3	2	10430,59	9709,6	720,9917	6,91228
9	3	3	14442,36	12693	1749,358	12,11269
10	3	3	14442,36	12693	1749,358	12,11269

Tabella 12 - h=9mm; frequenze naturali [Hz]

MODO	m	n	Kirchhoff	Nastran	ERRORE	ERRORE%
1	1	1	1783	1720,2	62,80713	3,522539
2	1	2	4457,52	4276,6	180,9178	4,058712
3	2	1	4457,52	4276,6	180,9178	4,058712
4	2	2	7132,03	6682,2	449,8285	6,307161
5	1	3	8915,04	8407	508,0356	5,698638
6	3	1	8915,04	8413	502,0356	5,631336
7	2	3	11589,55	10650	939,5463	8,106843
8	3	2	11589,55	10650	939,5463	8,106843
9	3	3	16047,06	13896	2151,064	13,40472
10	3	3	16047,06	13896	2151,064	13,40472

Tabella 13 - h=10mm; frequenze naturali [Hz]

I risultati ottenuti sono meglio evidenziati dal Grafico 7, che mostra chiaramente come l'errore percentuale cresca, a parità di tutti gli altri parametri, al crescere dello spessore e del modo di vibrazione considerato.

Questo comportamento è dovuto al fatto che la teoria di Kirchhoff tende a sovrastimare il valore delle frequenze per piastre spesse. In particolare l'ipotesi *vi* sul comportamento della piastra sotto carico si traduce nel trascurare la deformazione per effetto di taglio trasversale. Tale effetto, insieme con quello dovuto all'inerzia rotazionale, assume importanza quando la piastra diventa relativamente spessa o quando si desiderano soluzioni particolarmente accurate per alti modi di vibrazione.

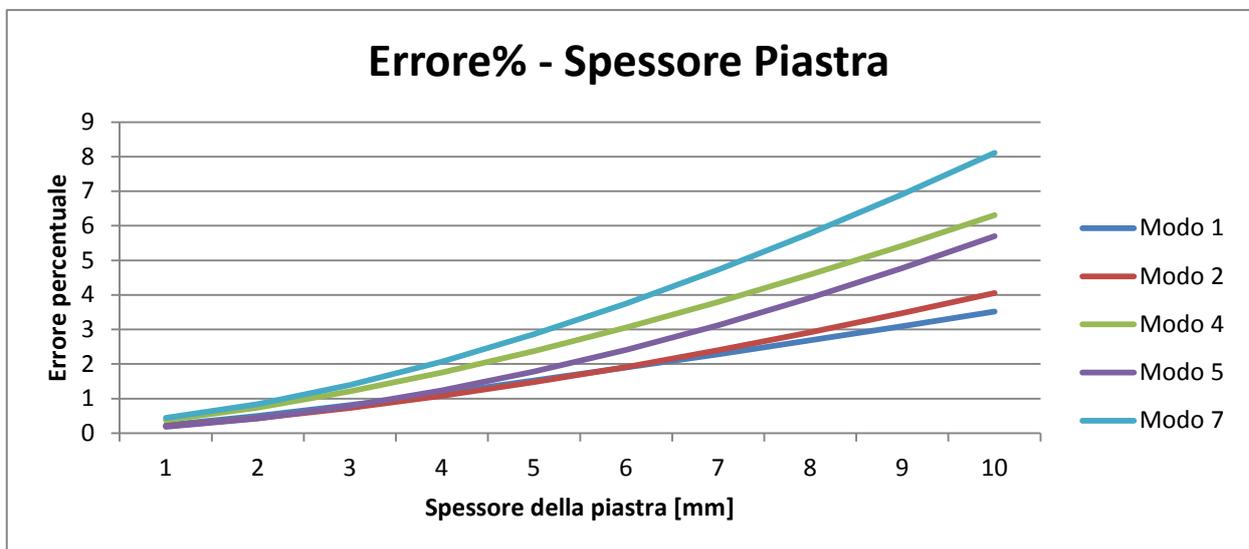


Grafico 7 - Errore % al variare dello spessore della piastra

3.2 Cenni sulla teoria della piastra di Mindlin

Secondo Wittrick (1987) l'errore nella teoria della piastra di Kirchhoff è dell'ordine di h^2/μ^2 dove h è lo spessore e μ la semilunghezza d'onda tipica della piastra vibrante. Molte teorie sono state proposte per ridurre tale ordine di grandezza; fra tutte, quella presentata da Mindlin (1951) tiene conto della deformazione di taglio grazie ad un coefficiente correttivo.

In questa teoria le ipotesi sono sostanzialmente mantenute uguali a quelle di Kirchhoff (Pag. 6), tranne che per l'ipotesi v_i , modificata come segue ref[5]:

- *le fibre che sono perpendicolari al piano medio della piastra prima che si manifesti la flessione rimangono non deformate in "lunghezza", ma non sono necessariamente normali al piano medio deformato.* -

Tale assunzione implica una deformazione a taglio trasversale non-nulla, ma comporta anche un errore: si viola l'assunzione che lo stress di taglio sia nullo sulle facce libere in condizioni statiche poiché esso è considerato costante lungo lo spessore della piastra.

Proprio per compensare tale errore Mindlin propose che si applicasse uno *shear correction factor* k^2 alla sollecitazione di taglio.

Relazione fra le frequenze per classi di piastre

Si ha conoscenza di una relazione esatta fra le frequenze naturali delle piastre di Mindlin e quelle delle corrispondenti piastre di Kirchhoff; sebbene la validità di tale teoria sia limitata ad una ristretta classe di piastre dalla forma poligonale.

Essa assume due formulazioni: una completa e comprensiva dell'effetto dovuto all'inerzia rotazionale; l'altra, semplificata, che trascura tale effetto.

Le formule sono entrambe riportate, insieme con un Grafico che evidenzia come la sovrastima ottenuta dall'applicazione della teoria di Kirchhoff venga effettivamente ridotta servendosi della teoria di Mindlin.

La relazione fra la frequenza circolare della piastra di Mindlin e quella relativa alla piastra di Kirchhoff ha la seguente forma:

$$\omega_M^2 = \frac{6Gk^2}{\rho h^2} \left\{ \left[1 + \frac{1}{12} \omega_K h^2 \sqrt{\frac{\rho h}{D}} \left(1 + \frac{2}{k^2(1-\nu)} \right) \right] - \sqrt{\left[1 + \frac{1}{12} \omega_K h^2 \sqrt{\frac{\rho h}{D}} \left(1 + \frac{2}{k^2(1-\nu)} \right) \right]^2 - \frac{\rho h^2}{3Gk^2} \omega_K^2} \right\}$$

Espressione che, qualora si decida di trascurare l'effetto dell'inerzia rotazionale, si semplifica nella:

$$\omega_M^2 = \frac{\omega_K^2}{1 + \frac{\omega_K h^2}{6(1-\nu)k^2} \sqrt{\frac{\rho h}{D}}}$$

Dove si sono indicati con:

ω_M, ω_K - le frequenze circolari relative all'n-esimo modo di vibrare della piastra rispettivamente secondo Mindlin e secondo Kirchhoff

k^2 - il fattore di correzione del taglio

$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ - il modulo di elasticità tangenziale

Fattore di correzione del taglio

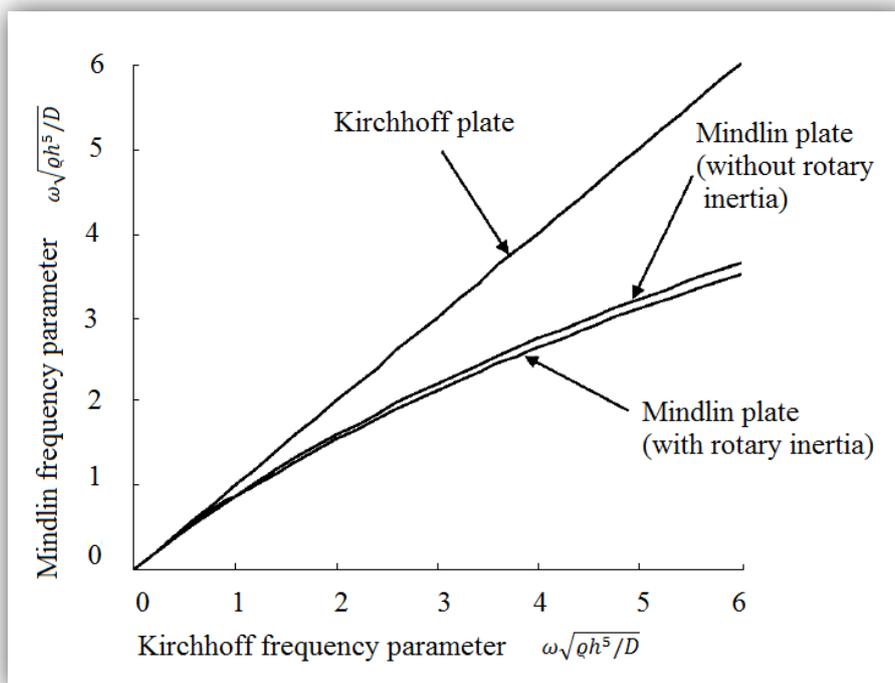


Grafico 8 - Confronto fra le teorie di Kirchhoff, Mindlin e Mindlin inclusivo di Rotary Inertia

Mindlin notò come, per una piastra isotropa, il fattore di correzione del taglio k^2 dipendesse dal coefficiente di Poisson e variasse da $k^2 = 0,76$ per $\nu = 0$ a $k^2 = 0,91$ per $\nu = 0,5$

Seguendo l'intuizione di Mindlin, Wittrick propose un fattore di correzione del taglio dato dall'espressione

$$k^2 = \frac{5}{(6 - \nu)}$$

Il fattore di correzione di Wittrick restituisce valori molto prossimi a quelli osservati nella realtà ed include l'effetto del coefficiente di Poisson; per questo motivo viene considerato a tutt'oggi la soluzione migliore.

3.3 Calcolo analitico con la teoria di Mindlin e confronto

Di seguito si riportano i risultati ottenuti per il calcolo delle frequenze naturali della piastra, utilizzando le formule riportate nella sezione 3.2.1 di questa trattazione. I restanti parametri sono immutati, per facilitare un confronto con i test effettuati in precedenza. I calcoli sono stati effettuati adottando per la piastra valori di spessore h da 1 a 10 mm. Il k^2 usato è quello proposto da Wittrick.

MODO	m	n	Nastran	Kirchhoff	ERR% Kirchhoff	Mindlin	ERR% Mindlin	Mindlin_RI	ERR% Mindlin RI
1	1	1	177.89	178.3	0.230880229	178.28	0.21963882	178.28	0.216612771
2	1	2	444.84	445.75	0.20496855	445.63	0.176879381	445.59	0.169322855
3	2	1	444.84	445.75	0.20496855	445.63	0.176879381	445.59	0.169322855
4	2	2	710.48	713.2	0.383241099	712.88	0.338229826	712.8	0.326128884
5	1	3	889.82	891.5	0.189202782	891	0.133056887	890.87	0.117969079
6	3	1	889.83	891.5	0.188076846	891	0.131931582	890.87	0.116843943
7	2	3	1153.8	1158.96	0.44675277	1158.11	0.373593922	1157.88	0.35394719
8	3	2	1153.8	1158.96	0.44675277	1158.11	0.373593922	1157.88	0.35394719
9	3	3	1512.5	1604.71	6.096291937	1603.09	5.989342644	1602.65	5.960652849
10	3	3	1512.5	1604.71	6.096291937	1603.09	5.989342644	1602.65	5.960652849

Tabella 14– H=1mm – Confronto FEM, Kirchhoff, Mindlin, Mindlin con IR – Appoggio Semplice [Hz]

MODO	m	n	Nastran	Kirchhoff	ERR% Kirchhoff	Mindlin	ERR% Mindlin	Mindlin_RI	ERR% Mindlin RI
1	1	1	354.83	356.6	0.4992	356.44	0.4542	356.4	0.4421
2	1	2	887.65	891.5	0.4341	890.51	0.3217	890.24	0.2915
3	2	1	887.65	891.5	0.4341	890.51	0.3217	890.24	0.2915
4	2	2	1415.9	1426.4	0.741	1423.85	0.5617	1423.17	0.5134
5	1	3	1775.4	1783	0.4285	1779.02	0.2039	1777.96	0.143
6	3	1	1775.4	1783	0.4285	1779.02	0.2039	1777.96	0.143
7	2	3	2298.4	2317.9	0.8488	2311.18	0.555	2309.39	0.477
8	3	2	2298.4	2317.9	0.8488	2311.18	0.555	2309.39	0.477
9	3	3	3015.4	3209.41	6.4341	3196.53	6.0068	3193.12	5.8936
10	3	3	3015.4	3209.41	6.4341	3196.53	6.0068	3193.12	5.8936

Tabella 15- H=2mm – Confronto FEM, Kirchhoff, Mindlin, Mindlin con IR – Appoggio Semplice [Hz]

MODO	m	n	Nastran	Kirchhoff	ERR% Kirchhoff	Mindlin	ERR% Mindlin	Mindlin_RI	ERR% Mindlin RI
1	1	1	530.55	534.9	0.8203	534.36	0.7187	534.22	0.6914
2	1	2	1327.5	1337.26	0.7349	1333.89	0.4816	1332	0.414
3	2	1	1327.5	1337.26	0.7349	1333.89	0.4816	1332	0.414
4	2	2	2113.8	2139.61	1.229	2131.02	0.8147	2128.74	0.7069
5	1	3	2653.6	2674.51	0.7889	2661.11	0.2831	2657.57	0.1497
6	3	1	2653.6	2674.51	0.7889	2661.11	0.2831	2657.57	0.1497
7	2	3	3428.4	3476.86	1.4137	3454.27	0.7546	3448.34	0.5816
8	3	2	3428.4	3476.86	1.4137	3454.27	0.7546	3448.34	0.5816
9	3	3	4500.9	4814.12	6.959	4770.97	6.0002	4759.74	5.7509
10	3	3	4500.9	4814.12	6.959	4770.97	6.0002	4759.74	5.7509

Tabella 16- H=3mm – Confronto FEM, Kirchhoff, Mindlin, Mindlin con IR – Appoggio Semplice [Hz]

MODO	m	n	Nastran	Kirchhoff	ERR% Kirchhoff	Mindlin	ERR% Mindlin	Mindlin_RI	ERR% Mindlin RI
1	1	1	704.94	713.2	1.1721	711.93	0.991	711.58	0.9426
2	1	2	1763.7	1783.01	1.0947	1775.06	0.6441	1772.96	0.5249
3	2	1	1763.7	1783.01	1.0947	1775.06	0.6441	1772.96	0.5249
4	2	2	2802.7	2852.81	1.788	2832.55	1.065	2827.24	0.8756
5	1	3	3522	3566.01	1.2497	3534.44	0.3531	3526.22	0.1199
6	3	1	3522.4	3566.01	1.2382	3534.44	0.3417	3526.22	0.1085
7	2	3	4539.8	4635.82	2.115	4582.67	0.9442	4568.98	0.6427
8	3	2	4539.8	4635.82	2.115	4582.67	0.9442	4568.978	0.6427
9	3	3	5961.5	6418.83	7.6713	6317.59	5.9731	6291.95	5.5431
10	3	3	5961.5	6418.83	7.6713	6317.59	5.9731	6291.95	5.5431

Tabella 17- H=4mm – Confronto FEM, Kirchhoff, Mindlin, Mindlin con IR – Appoggio Semplice [Hz]

MODO	m	n	Nastran	Kirchhoff	ERR% Kirchhoff	Mindlin	ERR% Mindlin	Mindlin_RI	ERR% Mindlin RI
1	1	1	877.96	891.5	1.5426	889.01	1.2591	888.35	1.1835
2	1	2	2195.8	2228.76	1.5	2213.3	0.7968	2209.24	0.6122
3	2	1	2195.8	2228.76	1.5	2213.3	0.7968	2209.24	0.6122
4	2	2	3481.3	3566.01	2.4334	3526.67	1.3034	3516.52	1.0118
5	1	3	4378.2	4457.52	1.8116	4396.3	0.4134	4380.67	0.0565
6	3	1	4378.2	4457.52	1.81166	4396.3	0.4134	4380.67	0.0565
7	2	3	5629	5794.77	2.945	5691.95	1.1183	5666.1	0.6592
8	3	2	5629	5794.77	2.94	5691.95	1.1183	5666.1	0.6592
9	3	3	7390.9	8023.53	8.5596	7828.38	5.9192	7780.57	5.2724
10	3	3	7390.9	8023.53	8.5596	7828.38	5.9192	7780.57	5.2724

Tabella 18– H=5mm – Confronto FEM, Kirchhoff, Mindlin, Mindlin con IR – Appoggio Semplice [Hz]

MODO	m	n	Nastran	Kirchhoff	ERR% Kirchhoff	Mindlin	ERR% Mindlin	Mindlin_RI	ERR% Mindlin RI
1	1	1	1049.5	1069.8	1.9347	1065.51	1.5255	1064.37	1.417
2	1	2	2623.3	2674.51	1.9522	2647.91	0.9382	2641.02	0.6755
3	2	1	2623.3	2674.51	1.9522	2647.91	0.9382	2641.02	0.6755
4	2	2	4148.4	4279.22	3.1534	4211.73	1.5265	4194.63	1.1145
5	1	3	5220.1	5349.02	2.4697	5244.18	0.4613	5218.02	0.0398
6	3	1	5221.4	5349.02	2.4442	5244.18	0.4363	5218.02	0.0647
7	2	3	6693.1	6953.73	3.893	6778.09	1.2698	6735.21	0.6292
8	3	2	6693.1	6953.73	3.893	6778.09	1.2698	6735.21	0.6292
9	3	3	8783.3	9628.24	9.6198	9296.3	5.8406	9218.12	4.9505
10	3	3	8783.3	9628.24	9.6198	9296.3	5.8406	9218.12	4.9505

Tabella 19– H=6mm – Confronto FEM, Kirchhoff, Mindlin, Mindlin con IR – Appoggio Semplice [Hz]

MODO	m	n	Nastran	Kirchhoff	ERR% Kirchhoff	Mindlin	ERR% Mindlin	Mindlin_RI	ERR% Mindlin RI
1	1	1	1219.6	1248.12	2.3372	1241.30	1.7793	1239.51	1.6323
2	1	2	3045.4	3120.26	2.4582	3078.25	1.0787	3067.51	0.726
3	2	1	3045.4	3120.26	2.4582	3078.25	1.0787	3067.51	0.726
4	2	2	4802.9	4992.42	3.9459	4886.15	1.7333	4859.8	1.1848
5	1	3	6045.5	6240.53	3.225	6075.78	0.5009	6035.74	0.1614
6	3	1	6045.7	6240.53	3.2225	6075.78	0.4975	6035.74	0.1647
7	2	3	7729.3	8112.68	4.96	7837.5	1.4	7772.55	0.5596
8	3	2	7729.3	8112.68	4.96	7837.5	1.4	7772.55	0.5596
9	3	3	10134	11232.94	10.8441	10715.37	5.7368	10598.84	4.5869
10	3	3	10134	11232.94	10.8441	10715.37	5.7368	10598.84	4.5869

Tabella 20– H=7mm – Confronto FEM, Kirchhoff, Mindlin, Mindlin con IR – Appoggio Semplice [Hz]

MODO	m	n	Nastran	Kirchhoff	ERR% Kirchhoff	Mindlin	ERR% Mindlin	Mindlin_RI	ERR% Mindlin RI
1	1	1	1388.1	1426.4	2.7596	1416.27	2.0297	1413.62	1.8385
2	1	2	3462	3566.01	3.0045	3503.69	1.204	3488	0.7511
3	2	1	3462	3566.01	3.0045	3503.69	1.204	3488	0.7511
4	2	2	5443.9	5705.62	4.8076	5548.51	1.9217	5510.5	1.2234
5	1	3	6852.8	7132.03	4.0746	6889.03	0.5287	6831.71	0.3078
6	3	1	6856	7132.03	4.0261	6889.03	0.4817	6831.71	0.3543
7	2	3	8735.4	9271.64	6.1387	8867.09	1.5075	8775.14	0.4549
8	3	2	8735.4	9271.64	6.1387	8867.09	1.5075	8775.14	0.4549
9	3	3	11438	12837.65	12.2369	12080.79	5.6198	11918.69	4.2026
10	3	3	11438	12837.65	12.2369	12080.79	5.6198	11918.69	4.2026

Tabella 21– H=8mm – Confronto FEM, Kirchhoff, Mindlin, Mindlin con IR – Appoggio Semplice [Hz]

MODO	m	n	Nastran	Kirchhoff	ERR% Kirchhoff	Mindlin	ERR% Mindlin	Mindlin_RI	ERR% Mindlin RI
1	1	1	1555	1604.71	3.1966	1590.32	2.2715	1586.58	2.0309
2	1	2	3872.5	4011.77	3.5963	3923.63	1.3203	3901.84	0.7576
3	2	1	3872.5	4011.77	3.5963	3923.63	1.3203	3901.84	0.7576
4	2	2	6070.6	6418.83	5.7363	6197.53	2.0909	6145.41	1.2324
5	1	3	7640.4	8023.53	5.0146	7682.12	0.546	7604.19	0.473
6	3	1	7644.9	8023.53	4.9527	7682.12	0.4868	7604.19	0.5325
7	2	3	9709.6	10430.59	7.4256	9864.27	1.5929	9740.76	0.3209
8	3	2	9709.6	10430.59	7.4256	9864.27	1.5929	9740.76	0.3209
9	3	3	12693	14442.36	13.782	13388.92	5.4827	13175.22	3.7991
10	3	3	12693	14442.36	13.782	13388.92	5.4827	13175.22	3.7991

Tabella 22– H=9mm – Confronto FEM, Kirchhoff, Mindlin, Mindlin con IR – Appoggio Semplice [Hz]

MODO	m	n	Nastran	Kirchhoff	ERR% Kirchhoff	Mindlin	ERR% Mindlin	Mindlin_RI	ERR% Mindlin RI
1	1	1	1720.2	1783	3.6512	1763.34	2.5077	1758.26	2.2127
2	1	2	4276.6	4457.52	4.2304	4337.54	1.4249	4308.44	0.7445
3	2	1	4276.6	4457.52	4.2304	4337.54	1.4249	4308.44	0.7445
4	2	2	6682.2	7132.03	6.7317	6832.06	2.2427	6763.46	1.216
5	1	3	8407	8915.04	6.043	8453.5	0.5531	8351.86	0.656
6	3	1	8413	8915.04	5.9674	8453.5	0.4814	8351.86	0.7268
7	2	3	10650	11589.55	8.822	10826.97	1.6617	10667.93	0.1683
8	3	2	10650	11589.55	8.822	10826.97	1.6617	10667.9	0.1683
9	3	3	13896	16047.06	15.4797	14637.24	5.3342	14367.36	3.3921
10	3	3	13896	16047.06	15.4797	14637.24	5.3342	14367.36	3.3921

Tabella 23– H=10mm – Confronto FEM, Kirchhoff, Mindlin, Mindlin con IR – Appoggio Semplice [Hz]

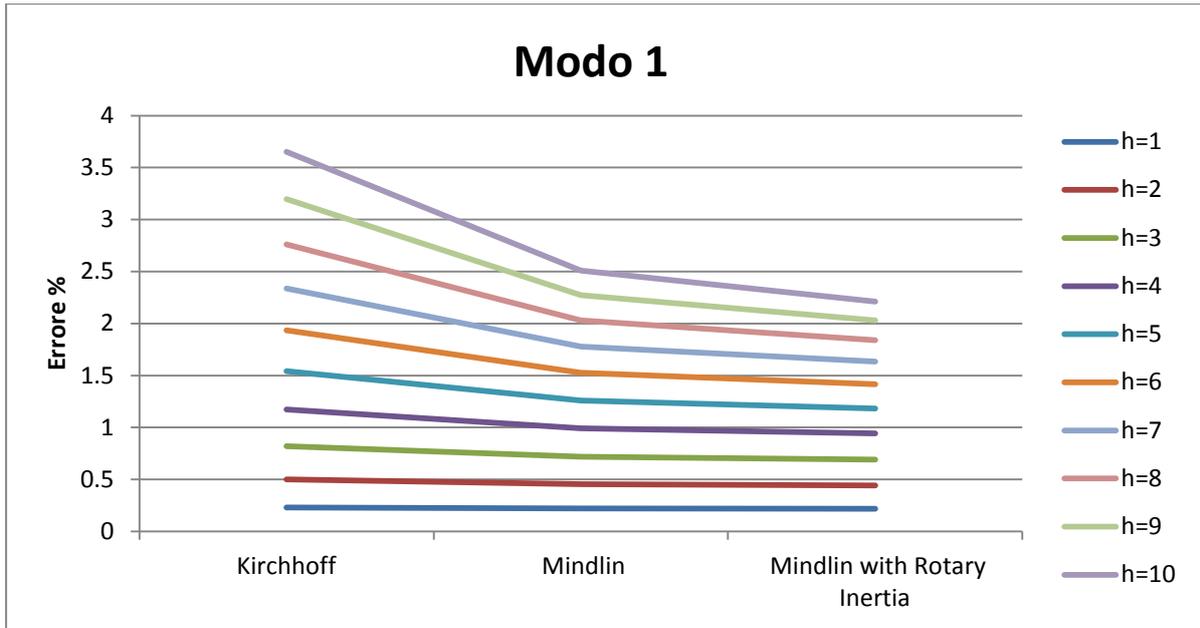


Grafico 9 - Confronto dell'errore% adottando le teorie di Kirchhoff, Mindlin e Mindlin con RI

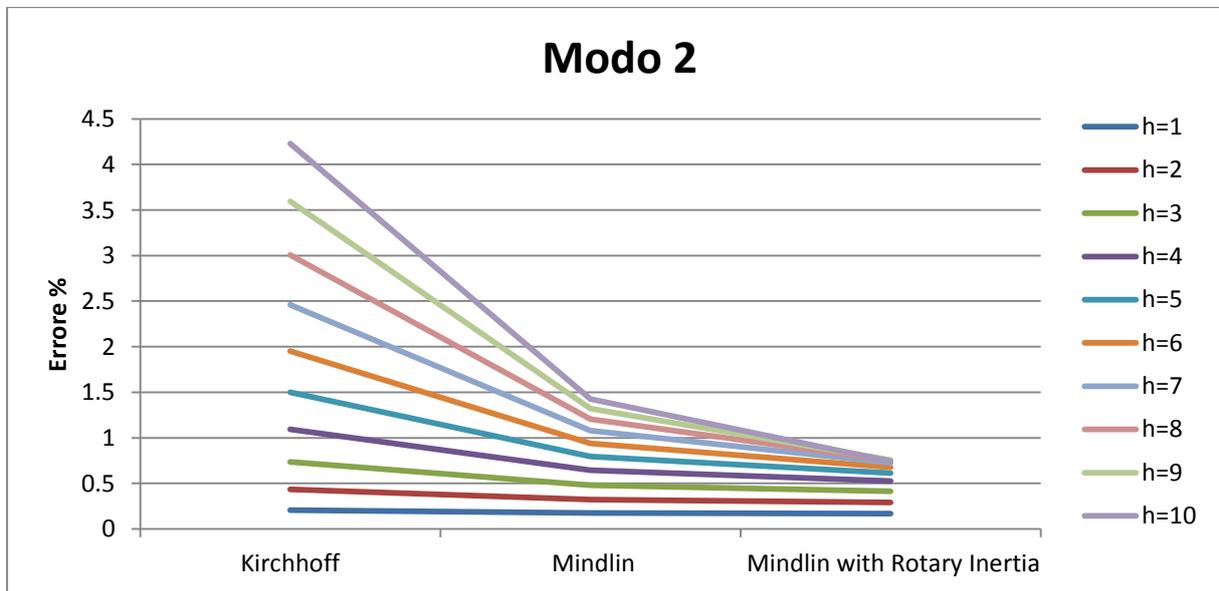


Grafico 10 - Confronto dell'errore% adottando le teorie di Kirchhoff, Mindlin e Mindlin con RI

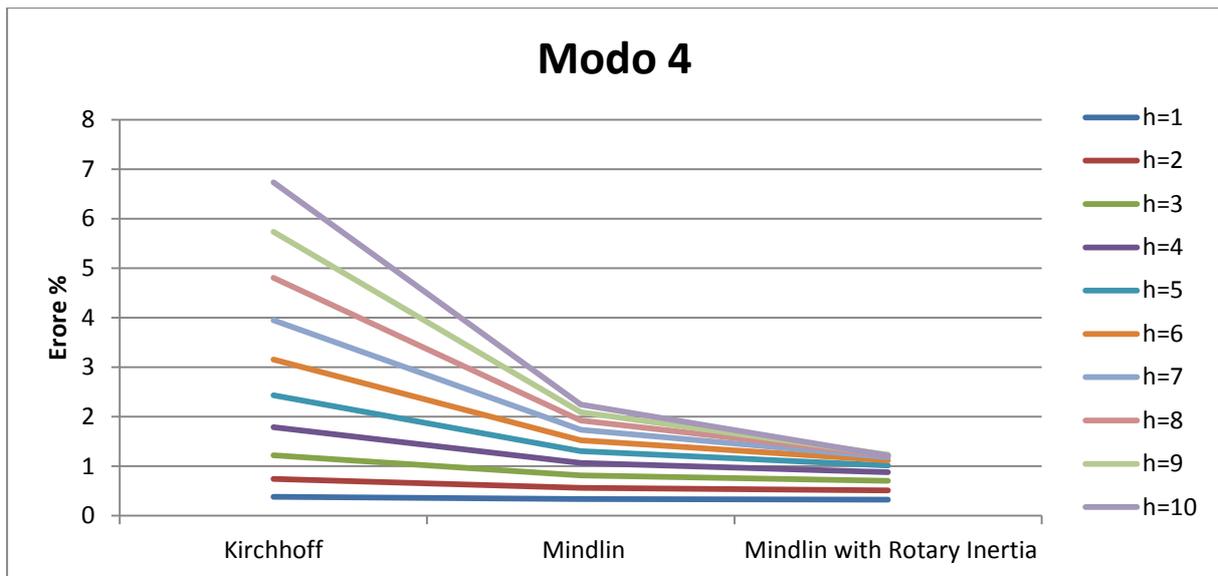


Grafico 11 - Confronto dell'errore% adottando le teorie di Kirchhoff, Mindlin e Mindlin con RI

Nei Grafici 9, 10 ed 11 si sono confrontati gli errori percentuali relativi ai modi di vibrare propri delle prime 3 frequenze, valutati con le tre teorie viste fin ora. Il risultato principale riguarda la variazione di tale errore al variare dello spessore adottato: se per una piastra sottile si ha una diminuzione trascurabile di un errore già molto piccolo, per il caso di massimo spessore la teoria più raffinata implica una riduzione dell'errore dell'ordine dell'81%, in perfetto accordo con quanto previsto.

Si noti fra l'altro come, sebbene l'andamento dei valori confrontati sia il medesimo per i restanti modi, l'entità del miglioramento nella precisione cresca ulteriormente al crescere della frequenza considerata, fino ad ottenere in casi estremi una riduzione dell'errore del 98%.

4 Analisi della piastra incastrata lungo i bordi

Il problema di valutare le vibrazioni di piastre rettangolari cui fosse applicato lungo i quattro lati un vincolo di incastro è stato affrontato affiancando all'analisi dinamica in Nastran/Patran i dati disponibili dalla letteratura. Sebbene tale problema sia stato sviscerato in maniera meno approfondita rispetto al caso della piastra vincolata con quattro appoggi, infatti, sono comunque presenti ampie raccolte di dati (talvolta tabulati frutto di valutazioni empiriche, talvolta risultanti dall'utilizzo di metodi di calcolo analitici o numerici più o meno approssimati). La gran parte di quei dati sono stati raccolti da A. Leissa nel suo lavoro "Vibration of Plates" del 1969 ref[4]. Proprio da tale lavoro sono tratti i valori usati in questo paragrafo per operare un confronto fra il modello FEM e la teoria.

L'autore offre anche un utile risultato in formula chiusa, di seguito riportato, che permette di calcolare analiticamente le frequenze proprie di piastre vincolate con incastri lungo il perimetro nel caso caratteristico in cui m ed n siano coincidenti.

$$\omega_{mm} = 2\left(m + \frac{1}{3}\right)^2 \frac{\pi^2}{a^2} \sqrt{\frac{\rho h}{D}}$$

I risultati ottenuti applicando questa formula sono stati riportati nelle Tabelle comparative in colore rosso, così come gli scarti percentuali ad essi relativi.

Si pone all'attenzione del lettore che i dati presentati dal Leissa, in quanto proposti in forma adimensionale, sono stati moltiplicati per il coefficiente $\sqrt{\frac{D}{\rho h}} \frac{1}{a^2} \frac{1}{2\pi}$ al fine di riadattarli alla situazione presente.

Le dimensioni usate sono quelle dei modelli a, b e c (vedere Pag. 24 per maggiori dettagli) ed il materiale usato è la medesima lega di alluminio.

La mesh utilizzata è una *IsoMesh* con Topology *Quad4*, caratterizzata da 100, 50 e 25 elementi per lato. Il set di proprietà è *Thin Shell* bidimensionale.

Il vincolo è stato simulato creando delle Boundary Conditions di tipo Displacement Constraint con le seguenti proprietà:

Traslazioni nulle lungo le direzioni dei tre assi $\langle T1, T2, T3 \rangle = \langle 0, 0, 0 \rangle$

Rotazioni nulle attorno ai tre assi $\langle R1, R2, R3 \rangle = \langle 0, 0, 0 \rangle$

Tale vincolo è stato poi applicato a tutti i nodi presenti sul perimetro.

MODO	A.Leissa: a	FEM [Hz]	SCARTO%
1	254.1	260.16	2.3284
	254.04	260.16	2.3509
2	527.75	530.15	0.4525
3	778.02	780.72	0.3463
	778	780.72	0.3472
4	952.9	954.01	0.1143
5	1190.08	1188.9	0.0994
6	1522.8	1517.1	0.37598
7	1587.74	1582.8	0.3122
	1587.77	1582.8	0.3143
8	1753.38	1742.2	0.6416
9	2140.61	2128.1	0.58798
10	2683.35	2661.4	0.8247
	2683.34	2661.4	0.8243

Tabella 24 – Piastra incastrata, confronto Letteratura-FEM. Caso a

MODO	A.Leissa: b	FEM [Hz]	SCARTO%
1	508.2 508.09	519.9 519.9	2.2495 2.272
2	1055.5	1059.1	0.3397
3	1556.03 1556.02	1557.5 1557.5	0.0942 0.0951
4	1905.84	1906	0.0084
5	2380.16	2370	0.4289
6	3045.61	3030.9	0.4853
7	3175.48 3175.55	3149.6 3149.6	0.82177 0.8239
8	3506.76	3487.2	0.5608
9	4281.23	4229.9	1.2134
10	5366.69 5366.68	5278.2 5278.2	1.6767 1.6763

Tabella 25 - Piastra incastrata, confronto Letteratura-FEM. Caso b

MODO	A.Leissa: c	FEM [Hz]	SCARTO%
1	1016.41 1016.18	1039.8 1039.8	2.2495 2.272
2	2111	2118.3	0.3444
3	3112.07 3112.04	3115 3115	0.0942 0.0951
4	3811.68	3793.4	0.4819
5	4760.33	4740.1	0.4267
6	6091.22	6061.8	0.4853
7	6350.96 6351.1	6299.3 6299.3	0.8202 0.8223
8	7013.51	6943.9	1.0025
9	8562.451	8459.7	1.2146
10	10733.4 10733.35	10556 10556	1.6805 1.6801

Tabella 26 - Piastra incastrata, confronto Letteratura-FEM. Caso c

Come si può notare dall'analisi comparativa effettuata, anche per il vincolo di incastro sembra mantenersi il comportamento evidenziato in precedenza: ad un dimezzamento delle dimensioni corrisponde un raddoppiamento delle frequenze confermato dai risultati dei modelli FEM.

5 Vibrazione di piastre in presenza di masse concentrate

Si considera ora il metodo utilizzato per analizzare la vibrazione di piastre isotrope cui siano rigidamente attaccate masse concentrate. La trattazione qui riportata riassume quanto mostrato nell'articolo "*Vibration of thick plates carrying concentrated masses*", ref[7], a cui si rimanda per approfondimenti e che viene utilizzato senza ulteriori verifiche in quanto non specifico argomento della tesi.

Ipotizziamo di avere a che fare con un sistema composto da una piastra di spessore costante h ed R masse concentrate m_i ad essa collegate. Queste sono posizionate in (ξ_i, η_i) ; le dimensioni della piastra sono $0 \leq x \leq a$ e $0 \leq y \leq b$. Chiamiamo, inoltre, $w(x, y, t)$ lo spostamento trasversale e $\Phi_x(x, y, t)$ e $\Phi_y(x, y, t)$ le rotazioni "locali".

Introduciamo i seguenti parametri adimensionali che verranno utilizzati esclusivamente nella notazione di questo capitolo:

$$\bar{x} = \frac{x}{a} \quad \bar{y} = \frac{y}{a} \quad \bar{w} = \frac{w}{a} \quad \bar{\xi}_i = \frac{\xi_i}{a} \quad \bar{\eta}_i = \frac{\eta_i}{a} \quad \lambda = \frac{b}{a}$$

$$\Omega^2 = \frac{D}{\rho a^4} \quad \varepsilon = \frac{h}{2a} \quad \tau = \Omega t$$

$$\mu_i = \frac{m_i}{\rho a^2} \quad \sigma = \frac{kGha^2}{D} = \frac{3k(1-\nu)}{2\varepsilon^2}$$

Le equazioni di governo del moto in forma non dimensionale sono dunque:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}[(1-\nu)\nabla^2\Phi_x + (1+\nu)(\Phi_{x,xx} + \Phi_{y,yx}) - \sigma(\Phi_x - w_{,x}) - \frac{\varepsilon^2}{3}\ddot{\Phi}_x \\ = \varepsilon^2 \sum_1^R \eta_i \ddot{\Phi}_x(\xi_i, \eta_i, \tau) \delta(x - \xi_i) \delta(y - \eta_i) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}[(1-\nu)\nabla^2\Phi_y + (1+\nu)(\Phi_{x,xy} + \Phi_{y,yy}) - \sigma(\Phi_y - w_{,y}) - \frac{\varepsilon^2}{3}\ddot{\Phi}_y \\ = \varepsilon^2 \sum_1^R \eta_i \ddot{\Phi}_y(\xi_i, \eta_i, \tau) \delta(x - \xi_i) \delta(y - \eta_i) \end{aligned}$$

$$\sigma(\nabla^2 w - \Phi_{x,x} - \Phi_{y,y}) - \ddot{w} = \sum_1^R \mu_i \ddot{w}(\xi_i, \eta_i, \tau) \delta(x - \xi_i) \delta(y - \eta_i)$$

Dove k è il fattore di correzione del taglio visto in precedenza e ρ assume solo qui la valenza di Massa per unità di superficie.

Quindi, in analogia con il Paragrafo 1.6 si possono definire per un moto armonico lo spostamento:

$$w(x, y, \tau) = W(x, y) \sin(\alpha^2 \tau + \theta)$$

E le rotazioni:

$$\Phi_x(x, y, \tau) = \psi_x(x, y) \sin(\alpha^2 \tau + \theta)$$

$$\Phi_y(x, y, \tau) = \psi_y(x, y) \sin(\alpha^2 \tau + \theta)$$

Dove ora α^2 indica la frequenza naturale da determinare, e θ è un angolo di fase.

Le condizioni al contorno prendono la forma:

$$W(0, y) = W(1, y) = W(x, 0) = W(x, \lambda) = 0$$

$$\psi_y(0, y) = \psi_y(1, y) = \psi_x(x, 0) = \psi_x(x, \lambda) = 0$$

$$W_{,xx}(0, y) = W_{,xx}(1, y) = W_{,yy}(x, 0) = W_{,yy}(x, \lambda) = 0$$

Le equazioni di governo del moto si possono risolvere grazie all'utilizzo delle funzioni di Green per la piastra vibrante di Mindlin (la cui espressione verrà esplicitata in seguito); ci limitiamo ora ad introdurle:

$$G^i_s(x, y, \xi, \eta; \alpha), H^i_x(x, y, \xi, \eta; \alpha), H^i_y(x, y, \xi, \eta; \alpha), i = 1, 2, 3 \dots$$

Le soluzioni delle equazioni di governo, così come presentate in ref[7] sono dunque:

$$W_n(x, y) = \alpha^4_n \sum_1^R \mu_i [G^1_s(\xi_i, \eta_i, x, y; \alpha_n)W_n(\xi_i, \eta_i) + \varepsilon^2 H^1_x(\xi_i, \eta_i, x, y; \alpha_n)\psi_{x_n}(\xi_i, \eta_i) + \varepsilon^2 H^1_y(\xi_i, \eta_i, x, y; \alpha_n)\psi_{y_n}(\xi_i, \eta_i)]$$

$$\psi_{x_n}(x, y) = \alpha^4_n \sum_1^R \mu_i [G^2_s(\xi_i, \eta_i, x, y; \alpha_n)W_n(\xi_i, \eta_i) + \varepsilon^2 H^2_x(\xi_i, \eta_i, x, y; \alpha_n)\psi_{x_n}(\xi_i, \eta_i) + \varepsilon^2 H^2_y(\xi_i, \eta_i, x, y; \alpha_n)\psi_{y_n}(\xi_i, \eta_i)]$$

$$\psi_{y_n}(x, y) = \alpha^4_n \sum_1^R \mu_i [G^3_s(\xi_i, \eta_i, x, y; \alpha_n)W_n(\xi_i, \eta_i) + \varepsilon^2 H^3_x(\xi_i, \eta_i, x, y; \alpha_n)\psi_{x_n}(\xi_i, \eta_i) + \varepsilon^2 H^3_y(\xi_i, \eta_i, x, y; \alpha_n)\psi_{y_n}(\xi_i, \eta_i)]$$

Dove gli spostamenti $W(\xi_i, \eta_i)$ e le rotazioni $\psi_x(\xi_i, \eta_i)$ e $\psi_y(\xi_i, \eta_i)$ incognite in corrispondenza delle masse concentrate possono essere ricavate facendo tendere $x \rightarrow \xi_i$ e $y \rightarrow \eta_i$ $i = 1, 2, 3 \dots R$ e risolvendo il sistema di equazioni algebriche che se ne ottiene.

Scrivendo le equazioni precedenti in forma matriciale, ed imponendo nullo il determinante della matrice dei coefficienti si ottiene infine l'equazione

caratteristica per la determinazione degli autovalori α_n^4 e, quindi, le frequenze naturali $\alpha = \alpha_n$.

Alcune espressioni delle funzioni di Green per le piastre di Mindlin sono disponibili dalla letteratura:

$$G_s(x, y, \xi, \eta; \alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n U_{s_n}(x, y) \quad H_x(x, y, \xi, \eta; \alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \chi_{x_n}(x, y)$$

$$H_y(x, y, \xi, \eta; \alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \chi_{y_n}(x, y)$$

dove:

$$b_m = [f_1 U_{s_m}(\xi, \eta) + f_2 \chi_{x_m}(\xi, \eta) + f_3 \chi_{y_m}(\xi, \eta)] / c_{s_m} (\beta_m^4 - \alpha^4)$$

$$\beta_n^4 = \frac{\nabla^4 U_n(x, y)}{U_n(x, y)}$$

f_1, f_2, f_3 assumono rispettivamente i valori di 1 oppure 0 a seconda che l'effetto considerato sia attribuibile a

- 1) massa concentrata ($f_1 = 1; f_2 = 0; f_3 = 0$)
- 2) coppia concentrata rispetto all'asse y ($f_1 = 0; f_2 = 1; f_3 = 0$)
- 3) coppia concentrata rispetto all'asse x ($f_1 = 0; f_2 = 0; f_3 = 1$)

Per una piastra con vincolo di semplice appoggio su tutti e quattro i lati (indicando come di consueto con m ed l il numero di semionde in direzione rispettivamente x ed y):

$$U_s(x, y) = \sin(l\pi x) \sin(m\pi y/\lambda);$$

$$\chi_x(x, y) = \cos(l\pi x) \sin(m\pi y/\lambda);$$

$$\chi_y(x, y) = \sin(l\pi x) \cos(m\pi y/\lambda).$$

5.1 Masse concentrate nel modello FEM

Nel paragrafo presente si descrive l'introduzione di masse concentrate nel modello agli elementi finiti. Queste rappresentano un elemento di notevole importanza pratica quando modellizzano, ad esempio, strumentazioni elettroniche rigidamente collegate alla piastra. La validazione del modello verrà effettuata tramite una comparazione con dei dati tabulati disponibili dalla letteratura.

L'implementazione delle masse concentrate in Patran avviene per mezzo di elementi di tipo CONM2, procedendo come segue:

Meshing > Finite Elements

Action: *Create*

Object: *Element*

Method: *Edit*

Shape: *Point*

Topology: *Point*

Create new property > Element properties

Object: *0d*

Type: *Mass*

Options: *Lumped*

Inserendo nella scheda Input Properties > Mass il valore desiderato per la massa. Successivamente è necessario selezionare il nodo su cui applicare la massa appena creata. La grafica in Figura 4 rappresenta una piastra con una mesh superficiale di 41x41 nodi per lato, cui è stata collegata una massa concentrata nel nodo centrale.

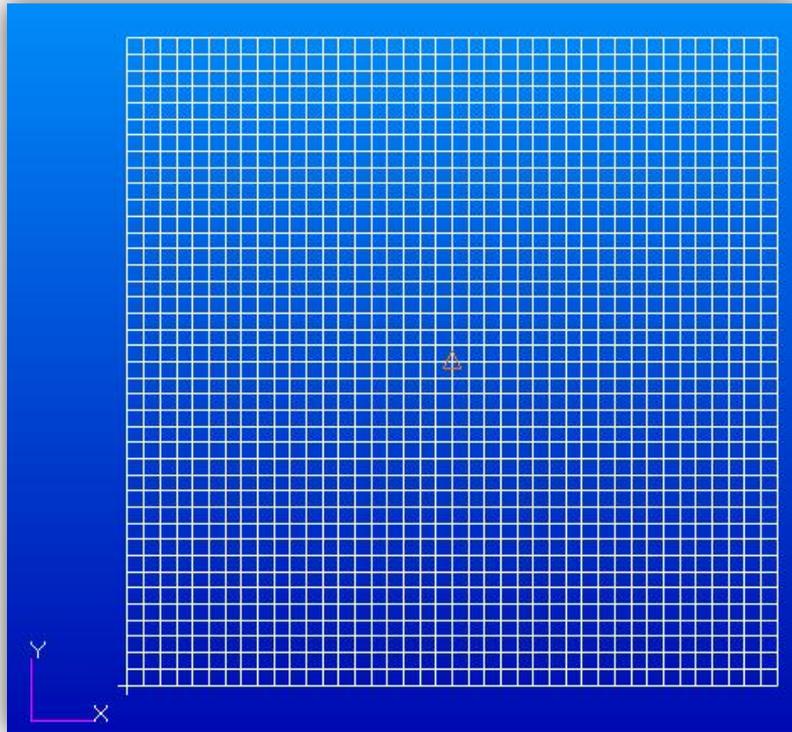


Figura 4 - Modello FEM con massa concentrata

concentrata è stata infine associata rigidamente al nodo centrale della piastra quadrata.

Si introducono i seguenti coefficienti adimensionali:

$$\mu = \frac{M_i}{\rho h a^2} \quad \varepsilon = \frac{h}{2a} \quad \Omega^2 = \frac{D}{\rho h a^4}$$

grazie ai quali si potranno svincolare i risultati ottenuti da dimensioni o caratteristiche meccaniche effettive.

ε	E	a	h	D	ρ	M_p	m_i	v
0,0000005	73000000000	0,15	0,00000015	2,25618E-11	0,297110297	1,003E-09	2,5069E-10	0,3
0,005	73000000000	0,15	0,0015	22,56181319	29711029,71	1002,7473	250,686813	0,3
0,05	73000000000	0,15	0,015	22561,81319	2971102971	1002747,3	250686,813	0,3

Tabella 27

Si fa presente che per adattare i risultati ai valori tabulati da Nicholson è stato necessario, volta per volta, modificare i valori di ρ (e conseguentemente di D, M_p ed m_i) affinché si ottenesse $\Omega^2=1$.

Si è inoltre dovuto provvedere a creare un *Subcase* del *Solution Type: Normal Modes* fin ora usato poiché in tale modalità d'analisi il programma restituisce di default solo le prime 6 frequenze proprie (10 modi di vibrare, per una piastra quadrata). Si è dunque impostato: Analyze > Entire Model > Subcases > Subcase Parameters > Number of Desired Roots: 30

In tutti i casi si è mantenuto un rapporto fra la massa totale della piastra M_p e la massa M_i costante e pari a $\mu = 0.25$

Nelle Tabelle 25, 26 e 27 si riportano i valori dei coefficienti di frequenza Ω_{mn} per tre diversi coefficienti ε .

$$\varepsilon = 0,0000005$$

MODO	m	n	Nicholson	Nastran	SCARTO%
1	1	1	13.729	13.7068	0.161929
2	1	2	49.348	49.2652	0.167789
3	2	2	78.957	78.6529	0.385129
4	1	3	65.005	64.7796	0.34668
5	2	3	128.3	127.674	0.487665
6	3	3	151.97	150.935	0.681268
7	1	4	167.78	167.516	0.157347
8	2	4	197.39	196.337	0.533475
9	1	5	211.73	210.556	0.554563
10	3	4	246.74	244.435	0.93428
11	2	5	286.22	284.653	0.547332
12	3	5	299.77	297.484	0.762688
13	4	4	315.83	311.866	1.255136

Tabella 28

$$\varepsilon = 0,005$$

MODO	m	n	Nicholson	Nastran	SCARTO%
1	1	1	13.719	11.0213	19.66371
2	1	2	49.303	49.1477	0.314983
3	2	2	78.841	78.3513	0.621097
4	1	3	64.718	59.0129	8.815271
5	2	3	128	127.115	0.691311
6	3	3	151.16	147.184	2.63058
7	1	4	167.26	166.988	0.162492
8	2	4	196.67	195.351	0.670914
9	1	5	210.38	206.654	1.771098
10	3	4	245.61	242.713	1.179445
11	2	5	284.71	282.919	0.628967
12	3	5	297.58	293.475	1.379454
13	4	4	313.99	309.082	1.562963

Tabella 29

$$\varepsilon = 0,05$$

MODO	m	n	Nicholson	Nastran	SCARTO%
1	1	1	13.203	12.6437	4.236508
2	1	2	45.448	45.095	0.776603
3	2	2	69.717	68.7632	1.368131
4	1	3	54.498	54.1033	0.724335
5	2	3	106.52	106.575	0.051999
6	3	3	118.1	107.486	8.986917
7	1	4	133.37	136.791	2.565215
8	2	4	152.29	149.031	2.14008
9	1	5	156.81	154.95	1.186383
10	3	4	181.89	183.394	0.82666
11	2	5	204.1	204.505	0.198489
12	3	5	208.66	208.702	0.020264
13	4	4	220.01	221.734	0.783423

Tabella 30

Anche in questo caso il comportamento del modello può essere considerato generalmente soddisfacente, dato il buon accordo con i dati tabulati da Nicholson, l'eterogeneità dei valori di *aspect ratio* considerati ed il numero considerevole di modi trattati per ognuno.

6 Confronto fra i modelli FEM 2D e 3D

In questa parte della trattazione si confronteranno i comportamenti del modello di piastra realizzato con elementi di tipo *Shell* bidimensionali e quello del modello realizzato con elementi solidi. Per maggiore completezza si sono trattate entrambe le tipologie di elementi solidi più usate:

- Elementi di tipo *Brick*, ovvero a forma di prisma, vantaggiosi poiché offrono un completo controllo sulla mesh che si crea, sulla forma e sull'*aspect ratio* degli elementi in cui verrà suddiviso l'oggetto da analizzare, senza contare il vantaggio di elementi solidi di dimensioni uniformi (qualora desiderato). Questo tipo di elementi impongono tuttavia una serie di particolari vincoli sul modello cui deve essere applicata la mesh; ad esempio per creare dei brick utilizzando il mesher automatico disponibile in Patran (Elem Shape: *Hex*; Mesher: *IsoMesh*; Topology: *Hex8*) sarà indispensabile che il nostro modello sia stato disegnato in modo da essere riconosciuto come tri-parametrico;

Il manuale di Patran ref[11] riporta a tal proposito la seguente spiegazione: "I solidi tri-parametrici sono parametrizzati sia sulle superfici che all'interno. Possono essere caratterizzati da un numero di facce variabile da quattro a sei e non possono avere buchi o vuoti all'interno."

Se d'altro canto si vogliono utilizzare degli elementi Brick senza affidarsi al suddetto mesher, sarà necessario procedere manualmente alla creazione del reticolo. E' questa la strada seguita nei procedimenti illustrati nei Paragrafi 6.1 e 7.1.

- Elementi di tipo *Tetraedrico*, impostati di default in Patran per la creazione automatica di Solid Mesh. Essi offrono il vantaggio di poter applicare la mesh con buona precisione su qualunque tipo di geometria, indipendentemente dalla complessità della stessa. Si può, inoltre, infittire facilmente la mesh in corrispondenza di parti del modello che risultino di particolare interesse. Gli elementi Tet portano però con sé anche diversi svantaggi: sono meno accurati nelle analisi in cui si prevedono stress flessionali, e necessitano di avere una lunghezza media del lato che sia una frazione della lunghezza minore del solido da analizzare, questo porta spesso ad avere dei modelli con una mesh troppo fitta e pesante per una analisi agevole. Tale problema si attenua tuttavia passando da elementi di tipo *Tet4* ad elementi *Tet10*. Gli elementi solidi tetraedrici sono, infine, necessari per utilizzare la funzione *imprint wizard*, fondamentale nei capitoli successivi.

6.1 Realizzazione dei modelli

Piastra bidimensionale: si è partiti da una superficie quadrata ai cui lati è stata applicata un *mesh seed* di 50 elementi per lato. Si è poi creato il reticolo tramite il mesher *IsoMesh* come descritto in precedenza, e si è creato un set di proprietà 2D *Thin Shell* poi applicato alla superficie stessa.

Piastra solida, elementi brick: la creazione di un solido come quello desiderato, in Patran, può essere affrontata in molti modi diversi. Uno è, ad esempio, quello di sfruttare la funzione:

Tab: *Geometry*

Action: *Create*

Object: *Solid*

Method: *Primitive*

Block Parameters:

X lenght	Y lenght	Z lenght	Base Origin Point
----------	----------	----------	-------------------

Una volta create la geometria si passa alla definizione di un materiale ed alla creazione di un set di proprietà da assegnare al solido appena creato:

Tab: Properties > 3D Properties > Solid

Infine si provvede a creare la mesh. La strada adottata in questo caso, una delle tante possibili, prevede la creazione di una mesh bidimensionale analoga a quella utilizzata fin ora, a cui verrà applicata un'estrusione tramite il seguente procedimento:

Tab: *Meshing*

Action: *Sweep*

Object: *Element*

Method: *Extrude*

Mesh Control > Number of elements: 2

Direction Vector: <0, 0, Z>

Base Entity List: selezionando a questa voce tutti gli elementi bidimensionali che si desidera estrudere il risultato ottenuto è il seguente:

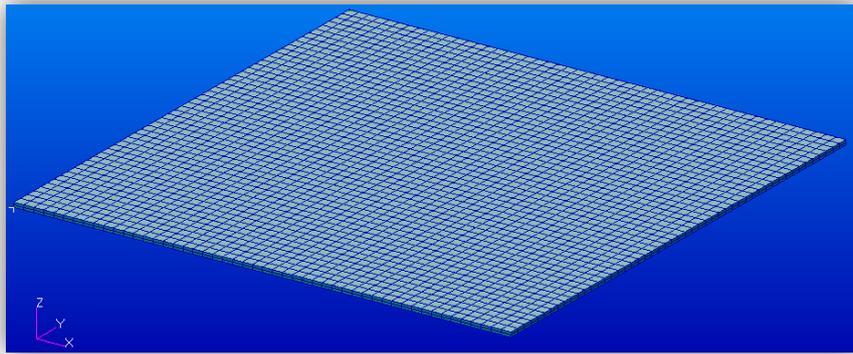


Figura 6 – Modello FEM, elementi solidi Brick

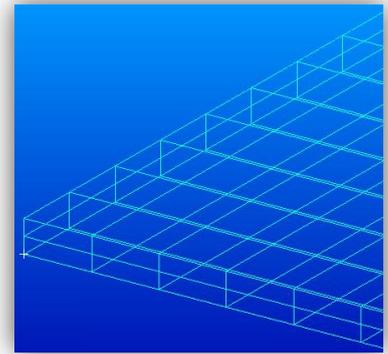


Figura 5 - Particolare della mesh

Piastra solida, elementi Tet10: dopo aver creato una geometria analoga a quella precedente, si è proceduto a creare il reticolo con le seguenti impostazioni:

Tab: *Meshing*

Action: *Create*

Object: *Mesh*

Type: *Elem*

Shape: *Tet*

Mesher: *TetMesh*

Topology: *Tet10*

Global Edge Length: 0.005

Selezionando il solido creato in Application Region, ed avviando il mesher si è generato il seguente risultato:

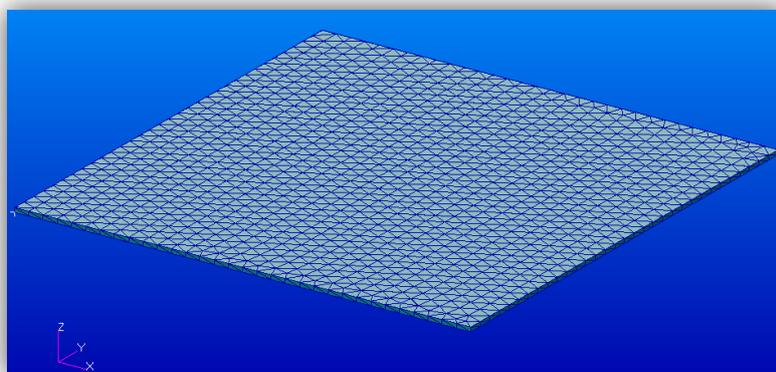


Figura 8 - Modello FEM, elementi solidi Tet10

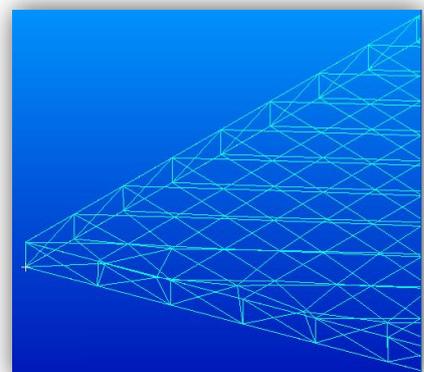


Figura 7 - Particolare della mesh

6.2 Descrizione dei vincoli, analisi e confronto

In questo paragrafo si tratterà di come siano stati modificati i vincoli applicati ai sistemi per operare l'analisi ed il confronto, in virtù della presenza ora di elementi solidi.

Se, infatti, non vi sono state variazioni per le condizioni al contorno di incastro, si sono invece utilizzati particolari accorgimenti per il vincolo di appoggio.

L'*incastro* è stato realizzato come di consueto con l'imposizione di traslazioni lungo gli assi e rotazioni attorno agli assi nulle, ed è stato applicato questa volta ad i nodi sullo spessore lungo il perimetro della piastra.

$\langle T1, T2, T3 \rangle$	$\langle R1, R2, R3 \rangle$	Application Region (FEM)
$\langle 0, 0, 0 \rangle$	$\langle 0, 0, 0 \rangle$	Tutti i nodi sullo spessore lungo il perimetro della piastra base

Tabella 31 - Descrizione del vincolo di incastro

Per realizzare l'*appoggio* si sono, invece, vincolati alla loro posizione due nodi opposti, centrali rispetto ai lati, e si sono impediti agli altri la traslazione in direzione normale al piano su cui giace la piastra e la rotazione in questo stesso piano:

$\langle T1, T2, T3 \rangle$	$\langle R1, R2, R3 \rangle$	Application Region (FEM)
$\langle 0, 0, 0 \rangle$	$\langle 0, 0, 0 \rangle$	Due nodi centrati su due lati opposti della superficie di base della piastra
$\langle , , 0 \rangle$	$\langle , , 0 \rangle$	Tutti i nodi sul perimetro della superficie di base della piastra

Tabella 32 - Descrizione del vincolo di appoggio

Si è fatta, inoltre, attenzione a vincolare non già tutti i nodi presenti sul bordo della piastra ma solo quelli giacenti sul piano medio, per impedire che un vincolo di traslazione rispetto all'asse Z si traducesse in un vincolo di rotazione attorno agli assi X ed Y.

E [MPa]	ν	$\rho \left[\frac{kg}{m^3} \right]$	a [m]	h [m]
72000	0,33	2810	0,165	0,0016

Tabella 33 - Parametri usati in questa simulazione

MODO	Mindlin	2D Shell	SCARTO%	3D Brick	SCARTO%	3D Tet10	SCARTO%
1	285.7	284.74	0.3369	297.36	4.0803	297.07	3.9788
2	713.89	712.03	0.261	711.7	0.3073	711.7	0.3073
3	713.89	712.04	0.2596	713.11	0.1098	713.19	0.0986
4	1141.65	1136	0.4949	1138.7	0.2584	1139.6	0.1796
5	1426.581	1424	0.1809	1426.8	0.0153	1426.8	0.0153
6	1426.581	1424.1	0.1739	1452.3	1.8028	1451.7	1.7608
7	1853.62	1843.9	0.5242	1843.3	0.5566	1846.2	0.4002
8	1853.62	1844	0.5188	1849.2	0.2383	1852.4	0.0657
9	2564.39	2419.4	5.6539	2374.9	7.3892	2372.7	7.475
10	2564.39	2419.4	5.6539	2426.4	5.3809	2425.6	5.4121

Tabella 34 - Comparazione fra i metodi teorici e di calcolo FEM descritti, Appoggio [Hz]

MODO	Leissa	2D Shell	SCARTO%	3D Brick	SCARTO%	3D Tet10	SCARTO%
1	511.72	519.9	1.5982	522.77	2.1591	523.75	2.3506
2	1062.81	1059.1	0.3487	1065.9	0.2911	1068.3	0.5169
3	1062.81	1059.1	0.3487	1065.9	0.2911	1068.5	0.5357
4	1566.8	1557.5	0.5936	1568.6	0.1148	1577.4	0.6765
5	1919.03	1896.7	1.1636	1911.2	0.408	1911.8	0.3767
6	1919.03	1906	0.6789	1920.5	0.0767	1925.7	0.3476
7	2396.64	2370	1.1114	2389.5	0.2977	2.401.90	0.2197
8	2396.64	2370	1.1114	2389.5	0.2977	2406.8	0.4241
9	3066.68	3030.9	1.1669	3058.8	0.2571	3059	0.2506
10	3066.68	3030.9	1.1669	3058.8	0.2571	3061.4	0.1723

Tabella 35 - Comparazione fra i metodi teorici e di calcolo FEM descritti, Incastro [Hz]

Nelle tabelle si sono riportati i valori ottenuti dalle simulazioni insieme con quelli calcolati tramite le teorie descritte nei Capitoli 3 e 4

Si può osservare come i tre modelli abbiano dei valori in buon accordo con la teoria. In particolare il caso in cui è stata applicata la mesh Tet10 risulta essere quello con errori più significativi, sebbene contenuti. Sicuramente in applicazioni in cui avessimo a che fare con geometrie prive di irregolarità o facilmente

manipolabili attraverso i metodi osservati nel Paragrafo 7.1, eviteremmo di affidarci ad elementi Tet10. Tuttavia considerando che l'incremento d'errore ha entità molto ridotta e si comporta, sovrastimando i valori delle frequenze, in modo cautelativo, si ritiene che l'utilizzo dei Tet Elem costituisca un compromesso accettabile.

7 Piastra con configurazione “realistica”

In virtù dei risultati ottenuti nel capitolo precedente si è proceduto con il lavoro introducendo altri componenti nel modello come ci si aspetta che sia in un caso realistico. In particolare, sulla base delle indicazioni preliminari di configurazioni possibili come fornite dal Dipartimento di Elettronica ref[12], dei numerosi elementi prevedibili, due hanno importanza rilevante dal punto di vista strutturale: il primo consiste in una piastra in lega di alluminio (tipicamente Ergal) con funzione prettamente strutturale, simile a quanto già presentato nell'analisi preliminare. Essa verrà trattata in analogia con il modo di operare tenuto fin ora. Le caratteristiche fisiche e geometriche introdotte, derivate dai comuni database disponibili, sono qui riportate.

Il secondo elemento simulato, l'unico con spessore e materiale tale da indurre una modifica apprezzabile nel comportamento della piastra, è composto da un toroide in rame i cui dettagli geometrici sono stati valutati essere ragionevolmente plausibili, su indicazione del Dipartimento di Elettronica del Politecnico di Torino.

Internamente ed esternamente al componente sopracitato si trova una “maschera” in un materiale composito largamente utilizzato come isolante

termico ed elettrico, poiché dotato di buona resistenza meccanica, peso ridotto, una capacità praticamente nulla di assorbire l'acqua e la proprietà di auto-estinguere eventuali insorgenze di fiamma.

7.1 Realizzazione dei modelli

L'approccio al componente reale verrà trattato, in questo stadio, compiendo due analisi parallele servendosi dei due tipi di solid mesh esposte in precedenza. Le differenze cui si giungerà in questo modo saranno imputabili, comunque, non solo alla differenza nella topologia e densità degli elementi finiti, ma anche alle diverse metodologie che si utilizzeranno per simulare le connessioni fra più solidi.

Piastra realistica, elementi Brick

L'approccio ad una geometria più complessa di quella relativa ad un solido singolo comporta in Patran un'organizzazione del lavoro in Gruppi.

Giacché sarà necessario, infatti, operare su porzioni di spazio corrispondente in ambito dei diversi solidi (si pensi, ad esempio, alle superfici di interfaccia), è necessario visualizzare tali porzioni separatamente per operare su di esse nell'ambito del gruppo corrente. E' fondamentale, inoltre, tenere debitamente conto di eventuali geometrie coesistenti nello stesso spazio, fossero anche solo geometrie di costruzione, per evitare errori in fase di assegnazione delle proprietà.

La strutturazione del lavoro in Gruppi ha proprio questo scopo, applicando le modifiche apportate ad un elemento esclusivamente nel gruppo correntemente visualizzato.

Allo strumento di creazione del gruppo si accede dalla Tab:

Group > Create

New Group Name: Piastra_Lega_AI.

Dopo aver selezionato come corrente il gruppo appena creato, si è proceduto alla creazione della geometria relativa:

Geometry

Action: *Create*

Object: *Point*

Method: *XYZ*

Impostando le coordinate per generare i quattro vertici della nostra piastra.

Geometry

Action: *Create*

Object: *Surface*

Method: *Vertex*

E selezionare nelle aree dedicate alle Surface Vertex List i punti creati in precedenza.

La superficie così ottenuta è stata infine estrusa per generare il solido desiderato.

Geometry

Action: *Create*

Object: *Solid*

Method: *Extrude*

Translation Vector: < x y z >

Selezionando sotto Surface List la superficie appena generate.

Il secondo elemento creato, previa creazione e visualizzazione di un apposito gruppo, è stata la rondella interna al toroide di rame, modellata geometricamente nel modo seguente:

Geometry

Action: *Create*

Object: *Solid*

Method: *Primitive > Cylinder*

Una procedura pressoché analoga è stata utilizzata per creare il toroide, nel gruppo omonimo.

Infine, si è creata la geometria della maschera esterna in isolante. Tale operazione ha richiesto degli accorgimenti particolari, poiché un solido che presenti un foro al proprio interno non può essere generato dall'estrusione di una superficie a meno che essa non sia stata definita come una Generic Trimmed Surface.

Si è ritenuto, tuttavia, più vantaggioso operare diversamente; si sono cioè create delle superfici che non contenessero singolarmente alcun foro, ed avessero quattro lati così da poter essere trattate dal programma come normali superfici senza elementi di criticità. Tutte queste superfici sono poi state estruse tramite un *direction vector* appropriato, attraverso un procedimento già trattato. Si è così creata una serie di otto solidi la cui unione avrebbe infine costituito la geometria cercata.

Il passo successivo è stato quello di creare dei set di proprietà che identificassero i nostri solidi come entità fisiche piuttosto che come delle mere geometrie. Per far ciò si sono innanzi tutto definiti i materiali da usare; nella scheda Properties:

Properties

Action: *Create*

Object: *Isotropic*

Method: *Manual Input*

Material Name: *Lega_AI*

Constitutive Model: *Linear Elastic*

Elastic Modulus: 72 000 000 000

Poisson Ratio: 0.33

Density: 2810

Material Name: *Rame*

Constitutive Model: *Linear Elastic*

Elastic Modulus: 110 000 000 000

Poisson Ratio: 0.33

Density: 8960

Material name: *Isolante*

Constitutive Model: *Linear Elastic*

Elastic Modulus: 24 131 650 480

Poisson Ratio: 0.136

Density: 1850

Successivamente si sono creati i set di proprietà veri e propri, sotto i tab:

Properties

Action: *Create*

Object: 3D

Type: Solid

In questo modo si sono create le proprietà applicate rispettivamente al solido presente nei vari gruppi di lavoro.

Il passo successivo è stato quello di creare le mesh da applicare a tali solidi, a tal proposito è necessario specificare la procedura comunemente adottata per imporre il collegamento fra superfici tangenti di solidi distinti, in Patran.

Si procede infatti, nella maggior parte dei casi, col creare una mesh per i due solidi tale che i rispettivi reticoli superficialmente combacino, almeno localmente laddove è richiesto il collegamento, con un grado di precisione che può essere modificato agendo su un apposito valore di tolleranza.

Successivamente si utilizza il comando *equivalence*, che individua automaticamente i nodi coincidenti, e provvede a cancellarli ed a “fonderli” sostituendoli con nuovi nodi comuni ai due reticoli.

Il passo successivo è stato quello di estrarre le mesh superficiali create seguendo il processo descritto al Paragrafo 6.1.

Piastra Realistica, elementi Tet10

Per la creazione di un modello analogo al precedente, cui applicare un reticolo composto da elementi solidi tetraedrici di tipo Tet10, si procederà esattamente come appena visto per:

- definizione della geometria
- set di proprietà dei materiali e dei solidi.

La differenza fondamentale consiste, infatti, proprio nel procedimento seguito per applicare la mesh. Si fa uso in questo caso di una funzione di Patran denominata *Imprint Wizard* in grado di individuare automaticamente le superfici di contatto fra i solidi e di predisporre il sistema ad una mesh che presenti un reticolo pronto per *l'equivalence*.

Sebbene sia intuitivo il vantaggio derivante dall'uso dell'*imprint wizard*, non si può prescindere dall'elencare alcune accortezze necessarie:

- *Imprint Wizard* è compatibile unicamente con una mesh di tipo Tet.
- Non è possibile escludere una regione di spazio o una lista di nodi dal processo di imprinting (è possibile, tuttavia, definire delle combinazioni di solidi che si desidera non vengano accoppiati).

Un pregio del comando, d'altro canto, è quello di essere stato completamente integrato nello strumento mesher di Patran, cosicché l'intero processo di creazione del reticolo ha richiesto esclusivamente i seguenti passaggi:

Finite Elements

Action: *Create*

Object: *Mesh*

Type: *Solid*

Elem Shape: *Tet*

Mesher: *TetMesh*

Topolgy: *Tet10*

Global Edge Length: 0.0034324

Assembly Parameters > Match Parasolid Faces

Neighbor Solid List: Solid 1:11

7.2 Analisi e confronto

Una volta creati i modelli si è proceduto con l'analisi dinamica; in assenza di riferimenti più precisi riguardo le condizioni operative effettive, si sono valutate le condizioni di vincolo di appoggio ed incastro applicate lungo i bordi della piastra in Alluminio. Esse sono state presentate nel Paragrafo 6.2 di questa trattazione, si rimanda alle Tabelle 28 e 29 di pag. 51 per una panoramica riassuntiva.

Il Solution Type usato è: *Normal Mode*.

Nelle tabelle che seguono si presentano i risultati ottenuti per i primi 10 modi naturali.

MODO	3D Tet10	3D Brick	SCARTO %
1	797.06	791.09	0.749003
2	1517.5	1510.5	0.461285
3	1518.5	1510.5	0.526836
4	2232.1	2223.9	0.367367
5	2622.7	2615.3	0.282152
6	2800.3	2788	0.439239
7	3463.2	3451.4	0.340725
8	3464.6	3451.4	0.380996
9	4394.3	4383.4	0.248049
10	4396.7	4383.4	0.3025

Tabella 36 - Incastro [Hz]

MODO	3D Tet10	3D Brick	SCARTO %
1	466.36	465.91	0.096492
2	1068.3	1066	0.215295
3	1068.6	1066.2	0.224593
4	1621.6	1615.5	0.376172
5	2136.9	2128.5	0.393093
6	2103.9	2097.8	0.289938
7	2629.2	2623.7	0.209189
8	2656.2	2652	0.158121
9	3646.2	3630.4	0.433328
10	3655.1	3641.9	0.361139

Tabella 37 - Appoggio [Hz]

A seguire si propone una panoramica delle deformazioni modali per i primi 5 modi, tipica della piastra incastrata ai bordi, coadiuvata da una grafica in sovrapposizione della vista frontale delle deformate relative ai due modelli ora introdotti.

Come si può notare il comportamento oltre ad essere il medesimo in termini di frequenze è anche molto simile termini di deformazioni, con una sovrapposibilità quasi totale dei due modelli (Figure 13;19;24;29).

In particolare questo risultato ci rassicura in merito alla possibilità di utilizzare, per i passaggi successivi, l'utile strumento dell'*imprint wizard* e dello stesso mesher automatico di Patran, entrambi configurabili in modo da alleggerire il carico di lavoro necessario all'aumentare della complessità del sistema analizzato.

E' importante, tuttavia, sottolineare il "prezzo" di questa scelta: il particolare *aspect ratio* del componente in esame ci costringe ad utilizzare una mesh insolitamente fitta a fronte di dimensioni moderatamente ridotte. Le simulazioni, quindi, sono risultate piuttosto onerose in termini di sfruttamento del calcolatore. Alcuni dei file di analisi generati raggiungono, infatti, dimensioni di svariati Gb.

Influenza delle dimensioni

In analogia con il Paragrafo 3.1 di questo studio, si intende ora valutare se la relazione che lega le dimensioni della piastra alle frequenze naturali mantenga un andamento lineare decrescente o se, piuttosto, la presenza degli elementi circuitali introdotti comporti qualche modifica da tale punto di vista. A tal proposito si affiancheranno i risultati ottenuti nei Paragrafi precedenti a quelli di due modelli di piastra dalle forme e materiali analoghi ma dalle dimensioni rispettivamente doppie e dimezzate. I tre casi verranno denominati “a” “b” e “c”, in analogia alla linea tenuta fin ora. In tutti e tre i casi si è usato un reticolo di elementi Tetraedrici, la cui validità è stata provata in questo stesso Paragrafo.

Appoggio [Hz]

MODO	a	b	c
1	252.74	466.36	923.72
2	535.23	1068.3	2167.5
3	539.82	1068.6	2197.9
4	819.13	1621.6	3294.4
5	1059.8	2136.9	4301.2
6	1115.5	2103.9	4362.2
7	1302.2	2629.2	5425.8
8	1346	2656.2	5448
9	1586.2	3646.2	7435.3
10	1596.5	3655.1	7499.2

Tabella 39 – Piastra Tipo2, varie dimensioni

Incastro[Hz]

MODO	A	b	c
1	414.49	797.06	1576.4
2	771.36	1517.5	3047
3	794.65	1518.5	3081
4	1147.4	2232.1	4431
5	1332.4	2622.7	5302
6	1441.3	2800.3	5615
7	1761.8	3463.2	6866.8
8	1784.5	3464.6	6886
9	2210.4	4394.3	8910
10	2267	4396.7	8927

Tabella 38 – Piastra Tipo2, varie dimensioni

Sembra emergere da queste prove che mantenendo l'*aspect ratio* ed agendo sulle dimensioni, il comportamento non subisca alcuno stravolgimento per opera dei nuovi elementi introdotti: dimezzando le lunghezze si ha per tutti i modi un raddoppiamento delle frequenze.

MODO 1

MODO	3D Tet10 [Hz]	3D Brick [Hz]
1	797.06	791.09

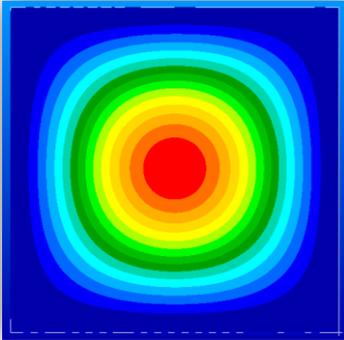


Figura 10 - Modo1, vista in pianta

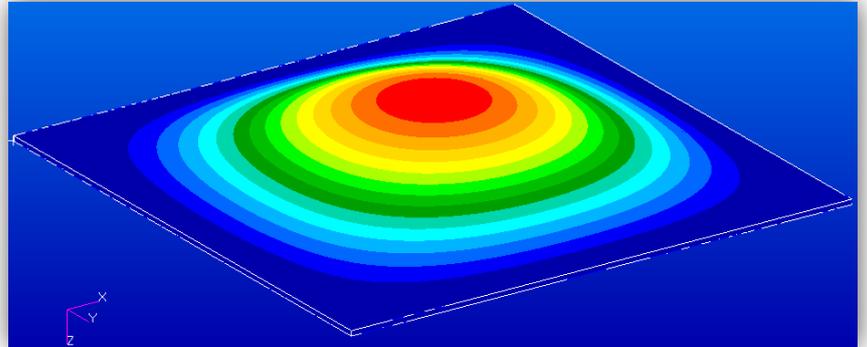


Figura 9 - Modo1, vista in assonometria

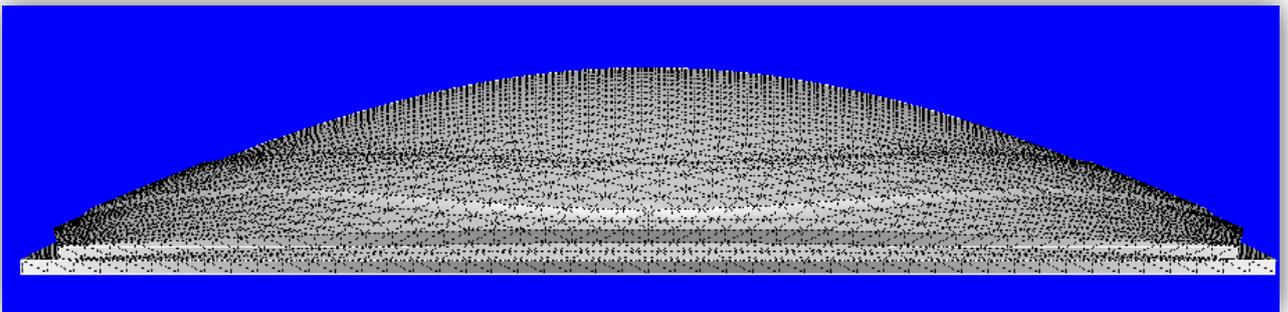


Figura 11 - Modo1; modello Tet10, vista frontale

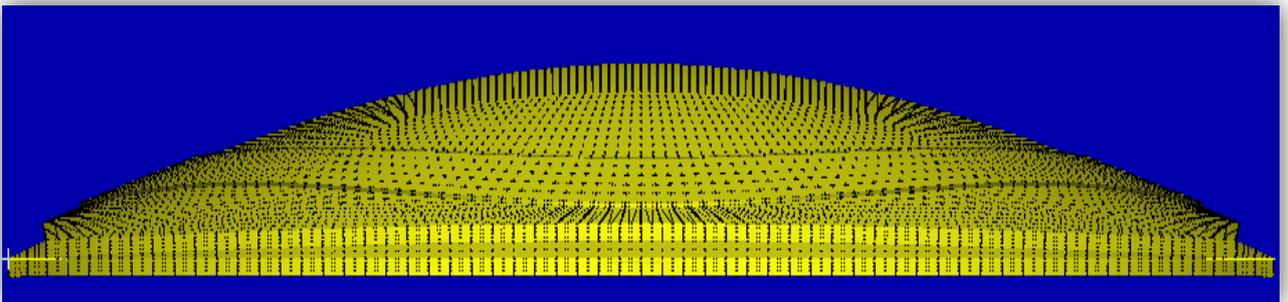


Figura 12 - Modo1; modello Brick, vista frontale

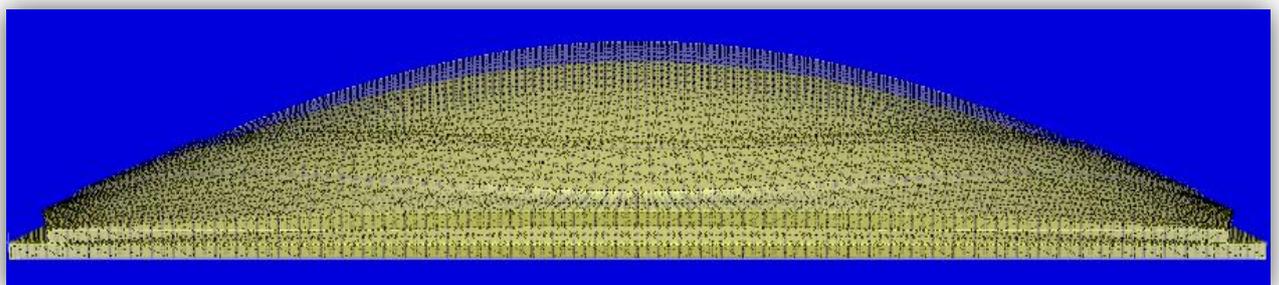


Figura 13 - Sovrapposizione delle viste dei due modelli; 3D Brick: giallo; 3D Tet10: grigio

MODO 2-3

MODO	3D Tet10 [Hz]	3D Brick [Hz]
2	1517.5	1510.5

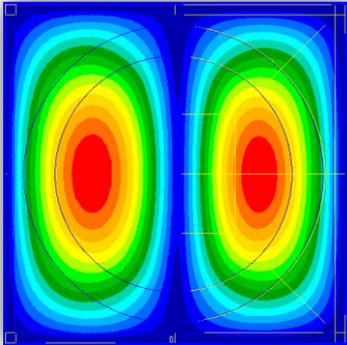


Figura 14 - Modo2, vista in pianta

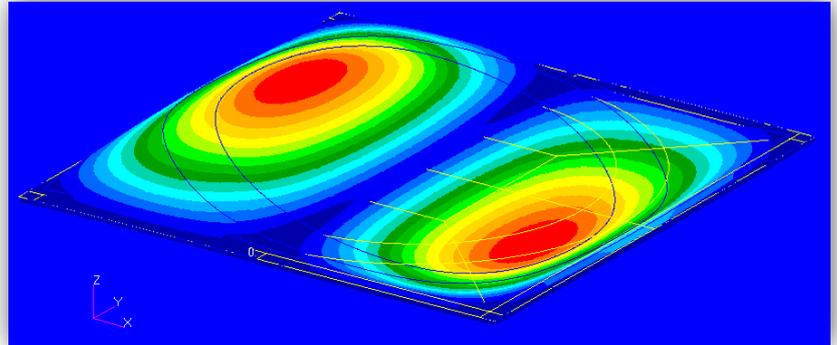


Figura 15 - Modo 2, vista in assonometria

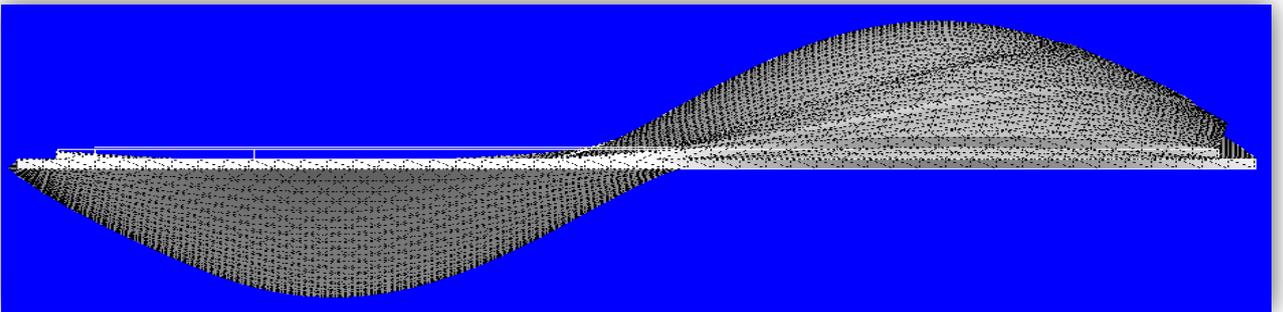


Figura 16 - Modo1; modello Tet10, vista frontale

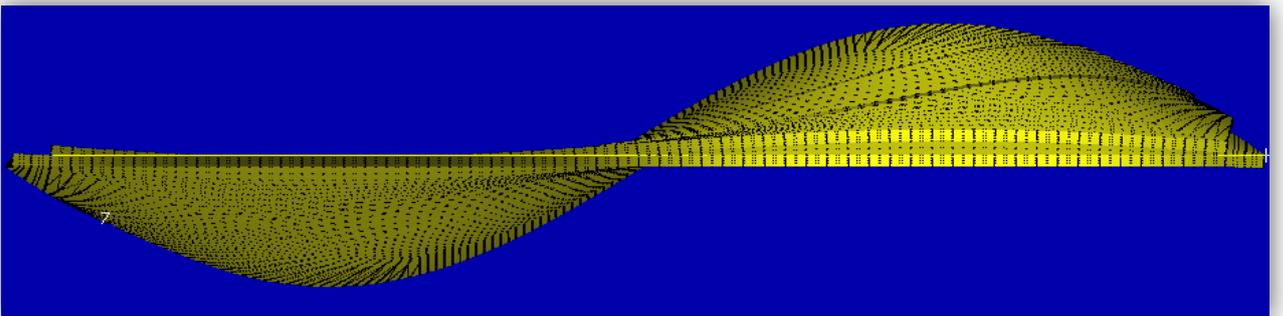


Figura 17 - Modo1; modello Brick, vista frontale

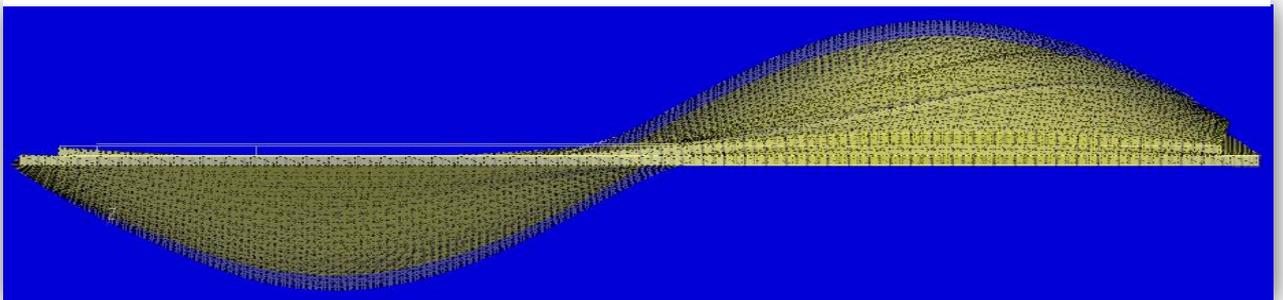


Figura 19 - Sovrapposizione delle viste dei due modelli; 3D Brick: giallo; 3D Tet10: grigio

MODO 4

MODO	3D Tet10 [Hz]	3D Brick [Hz]
4	2232.1	2223.9

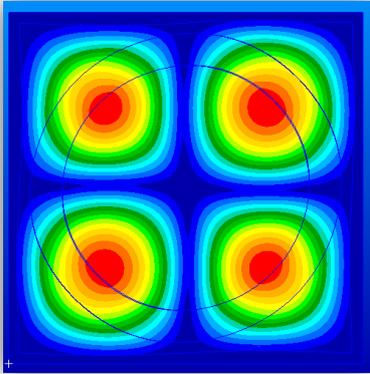


Figura 20 - Modo1, vista in pianta

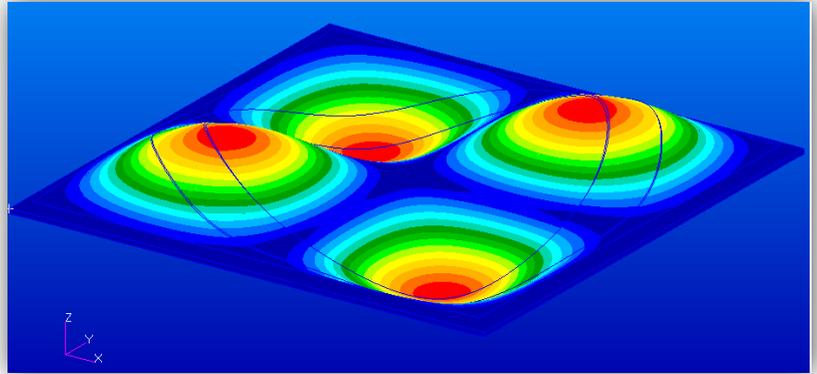


Figura 21- Modo1, vista in assonometria

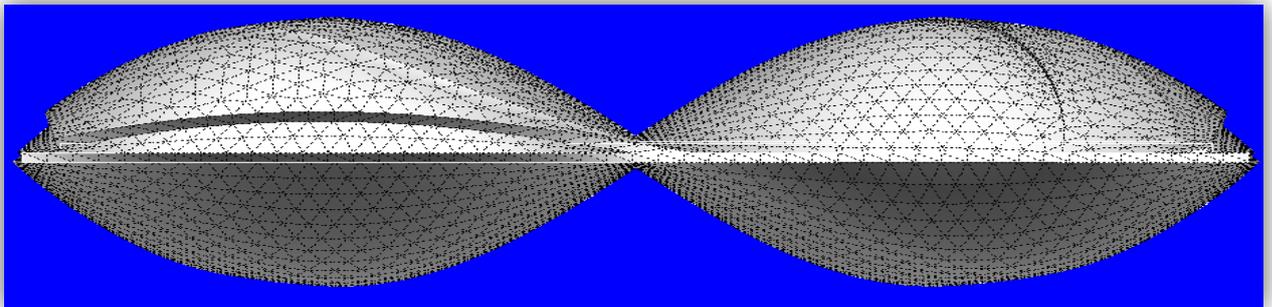


Figura 22 - Modo1; modello Tet10, vista frontale

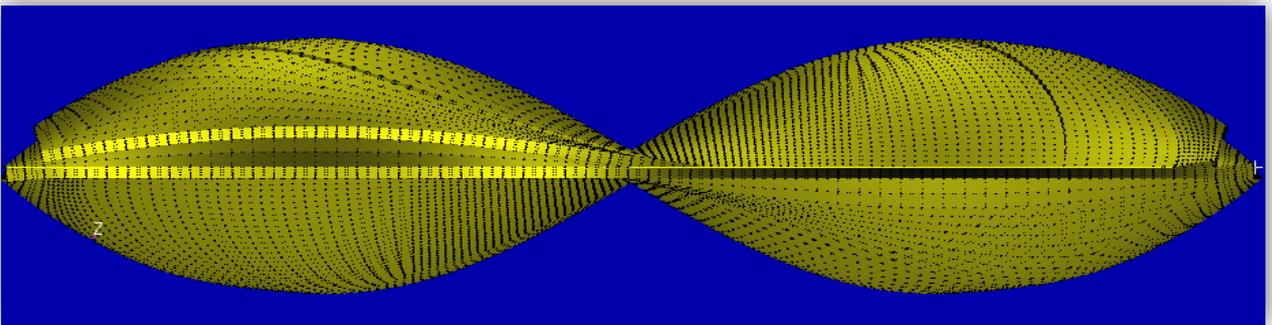


Figura 23 - Modo1; modello Brick, vista frontale

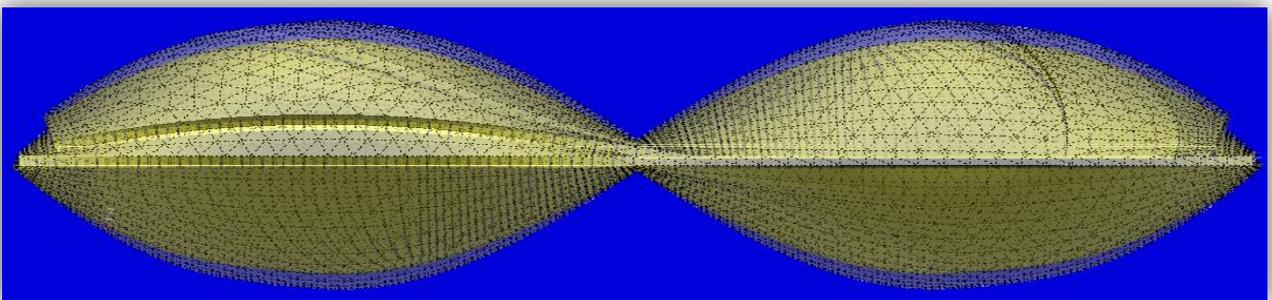


Figura 24 - Sovrapposizione delle viste dei due modelli; 3D Brick: giallo; 3D Tet10: grigio

MODO 5

MODO	3D Tet10 [Hz]	3D Brick [Hz]
5	2622.7	2615.3

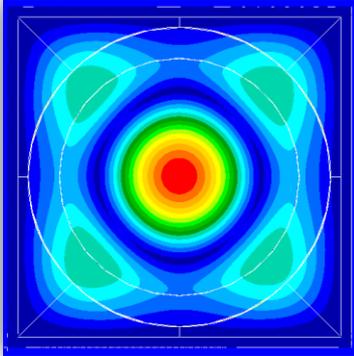


Figura 26 - Modo1, vista in pianta

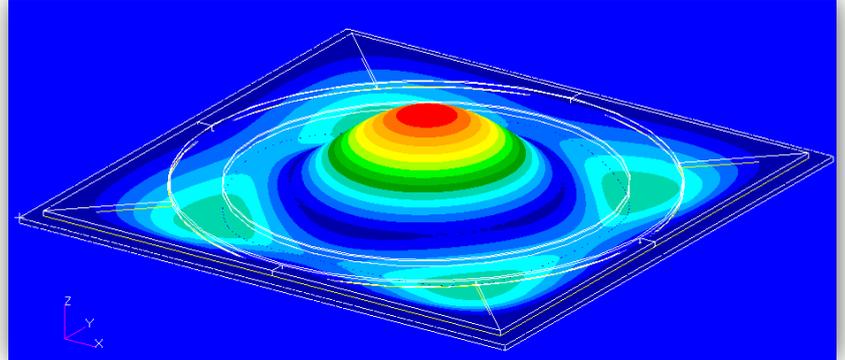


Figura 25 - Modo1, vista in assonometria

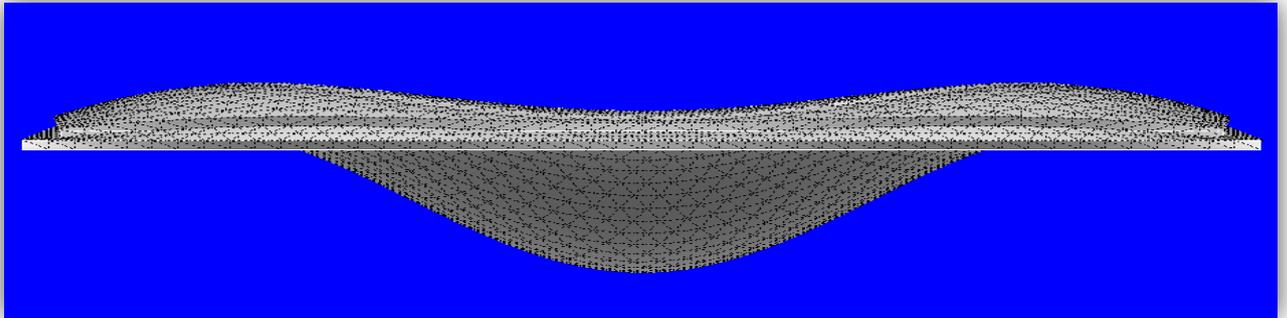


Figura 27 - Modo1; modello Tet10, vista frontale

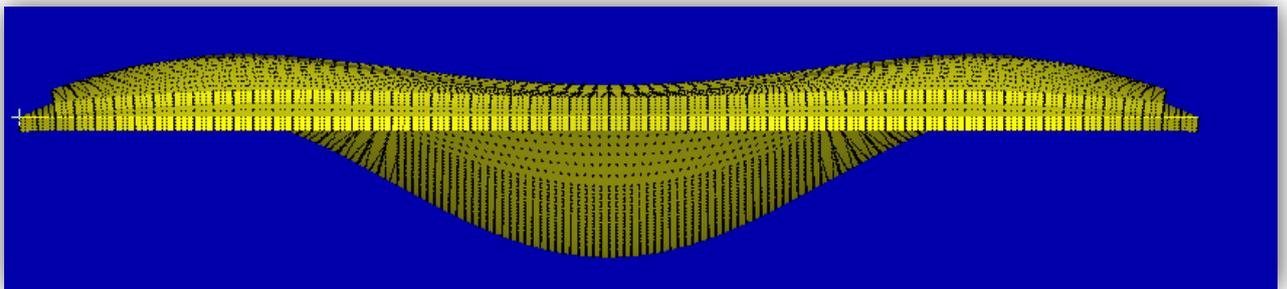


Figura 28 - Modo1; modello Brick, vista frontale

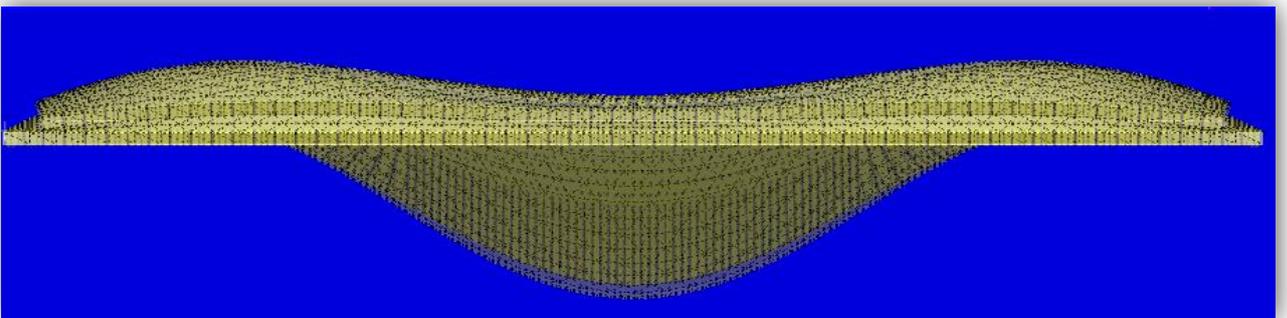


Figura 29 - Sovrapposizione delle viste dei due modelli; 3D Brick: giallo; 3D Tet10: grigio

7.3 Considerazioni sull'analisi della struttura

Le conclusioni che si possono trarre a questo punto della trattazione sono meglio esposte in relazione alle tabelle seguenti. Qui si sono confrontate le frequenze per Appoggio ed Incastro ottenuti dall'analisi della sola struttura in Lega di Alluminio e da quella della piastra nel suo complesso (d'ora in avanti denominate rispettivamente "Tipo1" e "Tipo2").

Appoggio

MODO	Tipo1	Tipo2	SCARTO %
1	297.07	466.36	56.987
2	711.7	1068.3	50.105
3	713.19	1068.6	49.834
4	1139.6	1621.6	42.296
5	1426.8	2136.9	49.769
6	1451.7	2103.9	44.927
7	1846.2	2629.2	42.411
8	1852.4	2656.2	43.392
9	2372.7	3646.2	53.673
10	2425.6	3655.1	50.689

Tabella 40 – frequenze naturali [Hz]

Incastro

MODO	Tipo1	Tipo2	SCARTO %
1	523.75	797.06	52.183
2	1068.3	1517.5	42.048
3	1068.5	1518.5	42.115
4	1577.4	2232.1	41.505
5	1911.8	2622.7	37.185
6	1925.7	2800.3	45.417
7	2.401.90	3463.2	44.186
8	2406.8	3464.6	43.951
9	3059	4394.3	43.652
10	3061.4	4396.7	43.617

Tabella 41 – frequenze naturali [Hz]

Il dato che immediatamente salta all'attenzione è l'incremento delle frequenze, conseguenza dell'introduzione nel modello dei vari componenti aggiuntivi.

In particolare si attendeva che l'introduzione dell'anello in rame, circa tre volte più denso della lega di alluminio della piastra, inducesse una riduzione delle frequenze proprie. Le analisi svolte invece mostrano come la presenza del toroide in rame, a parità delle altre condizioni introduca un irrigidimento della struttura e induca un incremento delle frequenze proprie. Si suggerisce quindi di approfondire questo aspetto sia da un punto di vista numerico sia da un punto di vista più strettamente sperimentale per avere una conferma diretta del fenomeno.

D'altro canto il contributo della maschera in sigillante era prevedibile non influire sensibilmente sul risultato date le ridotte caratteristiche meccaniche relative del materiale.

L'entità degli incrementi delle frequenze si attesta per i primi modi, i più interessanti dal punto di vista applicativo, su valori che vanno dal 40% al 57% c.a

E' dunque auspicabile che si tengano in considerazione questi fenomeni in previsione di applicazioni concrete della struttura.

8 Introduzione di una massa nel modello “realistico”

Una volta analizzato il comportamento della piastra in termini di frequenze, ci si è avvalsi del modello appena studiato per simulare un caso di particolare possibile interesse pratico: quello della piastra equipaggiata con tipica strumentazione come ad esempio un motore e una ruota di inerzia.

Sulla base delle indicazioni gentilmente fornite dal Dipartimento di Elettronica ref[12], questa potrebbe essere una delle configurazioni di riferimento per una applicazione realistica del componente. Basandosi su tali informazioni si è giunti al sistema presentato dal CAD in Figura 30.

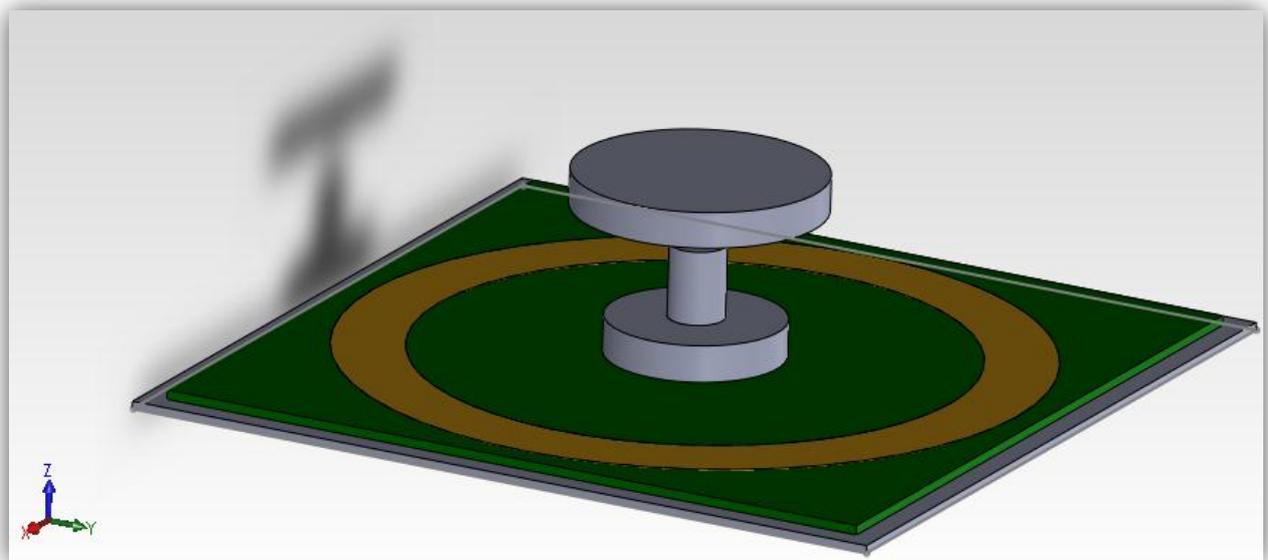


Figura 30 - CAD della piastra strumentata

Sebbene in precedenza l’approccio alla piastra rigidamente collegata ad una massa sia stato affrontato tramite l’utilizzo di un elemento CONM2, ovvero una massa puntiforme zero-dimensionale, nella simulazione presente si è optato per agire diversamente.

Si è infatti ritenuto di valutare la massa anche in relazione a fattori difficilmente controllabili con l'elemento CONM2, essi sono:

- L'effetto "distribuito" che la massa ha sul reticolo dovuto alla superficie di collegamento massa-piastra, contrapposta al precedente vincolo rigido che legava il punto massivo ad un singolo nodo del reticolo (Paragrafo 5.1.)
- L'effetto d'inerzia dovuto al fatto che la massa dello strumento non appartiene, come il caso ideale di studio vorrebbe, al piano medio della piastra; bensì essa si sviluppa normalmente a tale piano per distanze anche considerevoli se paragonate allo spessore della piastra di supporto.

Si è quindi cercato di riprodurre un solido avente una geometria paragonabile con quella presunta, assegnandogli una densità che lo caratterizzasse con una massa di 20g, 40g, 60g, 80g e 100g.

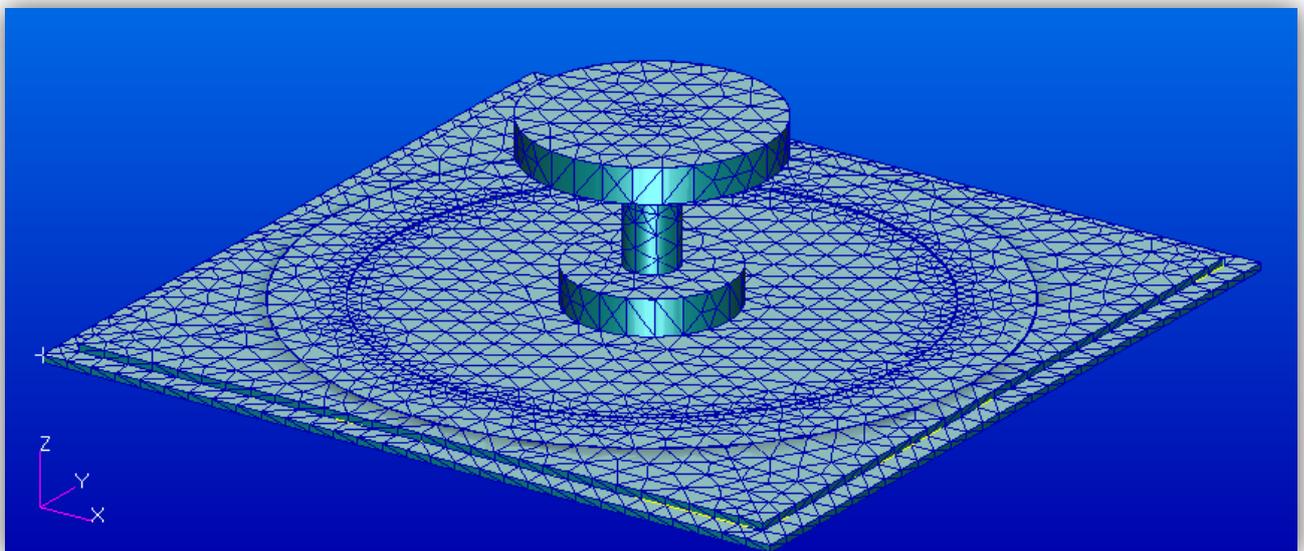


Figura 31 – Modello in Patran della piastra strumentata

Dopo aver applicato una mesh di topologia Tet10, di dimensioni molto ridotte (Global Edge Length = 0.00372642) avvalendosi dell'ormai noto strumento dell'*Imprint Wizard*, si è proceduto con la simulazione per l'analisi modale.

Nelle Tabelle seguenti si possono visualizzare i valori delle frequenze ottenuti, raffrontati a quelli ottenuti in precedenza (Paragrafo 7.3) :

Note:

- La presenza della massa ha generato l'insorgere di svariati altri modi di vibrazione oltre quelli proposti, si fa pertanto presente che i dati relativi alla piastra "Tipo2" vengono presentati nell'ordine con cui sono stati estratti dal programma, ma quelli relativi al sistema "Tipo2 + Massa" sono stati riordinati per essere confrontati con Modi dalla forma analoga.
- Nel caso di vincolo di incastro si è escluso dal confronto il Modo 5 poiché non chiaramente riconoscibile fra quelli stampati dal programma per il sistema Tipo2 + Massa.

MODO	Tipo2	Massa 20g	Massa 40g	Massa 60g	Massa 80g	Massa 100g
1	466.36	408.61	355.96	319.18	291.72	270.26
2	1068.3	728.87	543.43	451.27	394.33	353.92
3	1068.3	729.83	543.91	451.74	394.9	354.32
4	1621.6	1774.5	1774.4	1774.4	1774.5	1774.5
5	2103.9	1931.8	1775.1	1696.7	1649	1618.8
6	2136.3	2393.9	2393.9	2393.9	2393.8	2393.8

Tabella 42 – Confronto piastra Tipo2 e Tipo2 + Massa di entità variabile. Appoggio[Hz]

MODO	Tipo2	Massa 20g	Massa 40g	Massa 60g	Massa 80g	Massa 100g
1	797.06	708.17	596.59	522.28	470.72	431.84
2	1517.5	813.46	586.7	482.89	419.53	375.94
3	1518.5	818.26	589.95	485.16	421.45	377.62
4	2232.1	2572.8	2585.3	2580.6	2582.9	2582.7
5	2622.7	/	/	/	/	/
6	2800.3	3327	3326.8	3226.7	3329.8	3329.7

Tabella 43 - Confronto piastra Tipo2 e Tipo2 + Massa di entità variabile. Incastro[Hz]

Nella grafica proposta a seguire si può apprezzare il comportamento del sistema strumentato "Tipo2 + Massa". In rosso è visibile il sistema deformato, in verde il

wireframe del sistema a riposo. Si fa presente che le immagini sono estrapolate dall'analisi relativa al caso di appoggio.

MODO 1 - Tipo2+Massa(60g)

MODO	Appoggio [Hz]	Incastro [Hz]
1	319.18	522.28

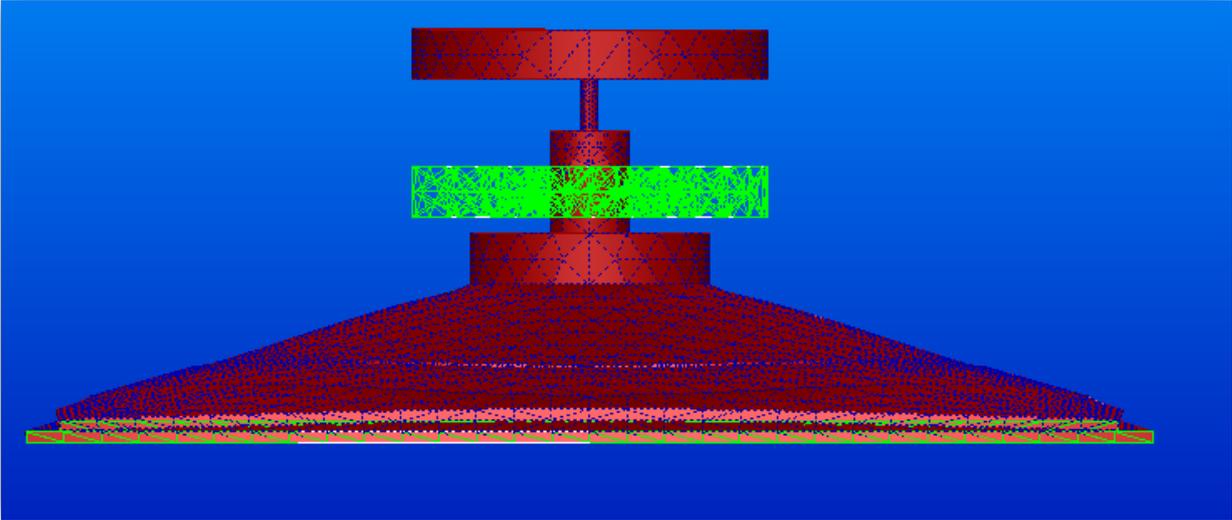


Figura 32 - Modo 1, Vista frontale

MODO 2 – 3 - Tipo2+Massa(60g)

MODO	Appoggio [Hz]	Incastro [Hz]
2-3	451.27	482.89

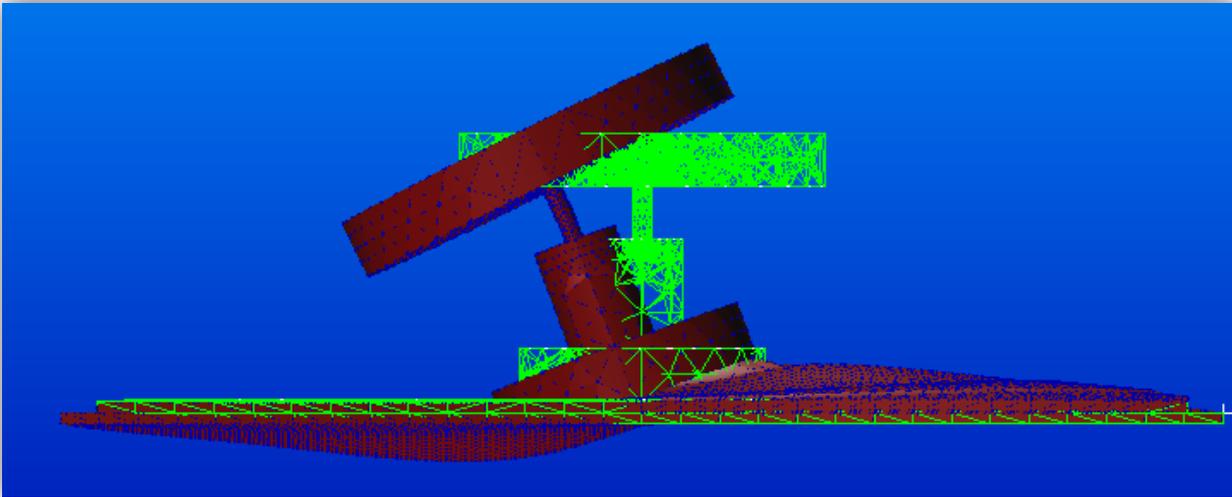


Figura 33 - Modo 2-3, Vista frontale

MODO 4 - Tipo2+Massa(60g)

MODO	Appoggio [Hz]	Incastro [Hz]
4	1774.4	2580.6

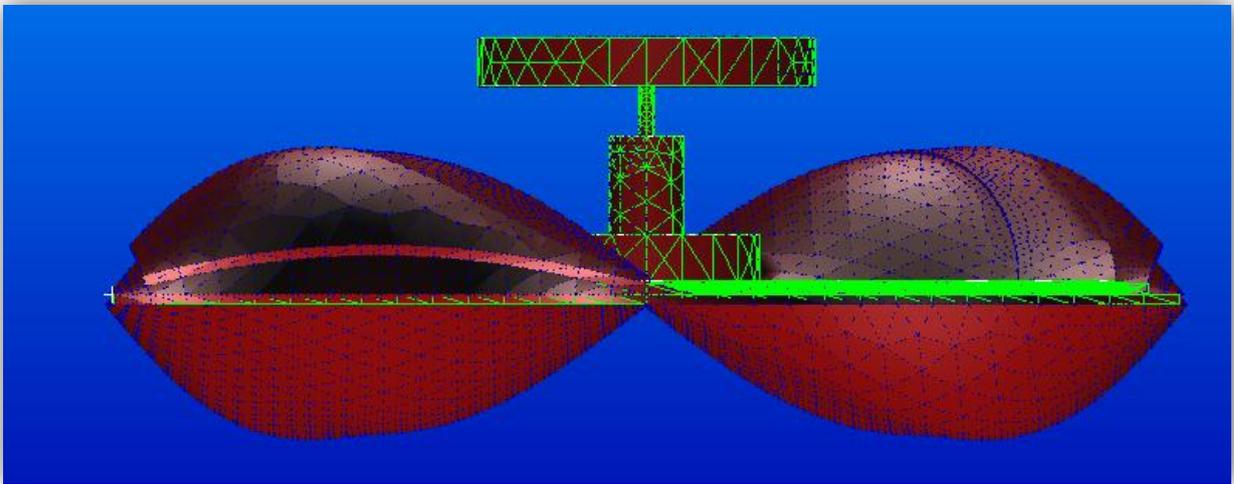


Figura 34 - Modo 4, Vista frontale

MODO 5 - Tipo2+Massa(60g)

MODO	Appoggio [Hz]	Incastro [Hz]
5	1696.7	/

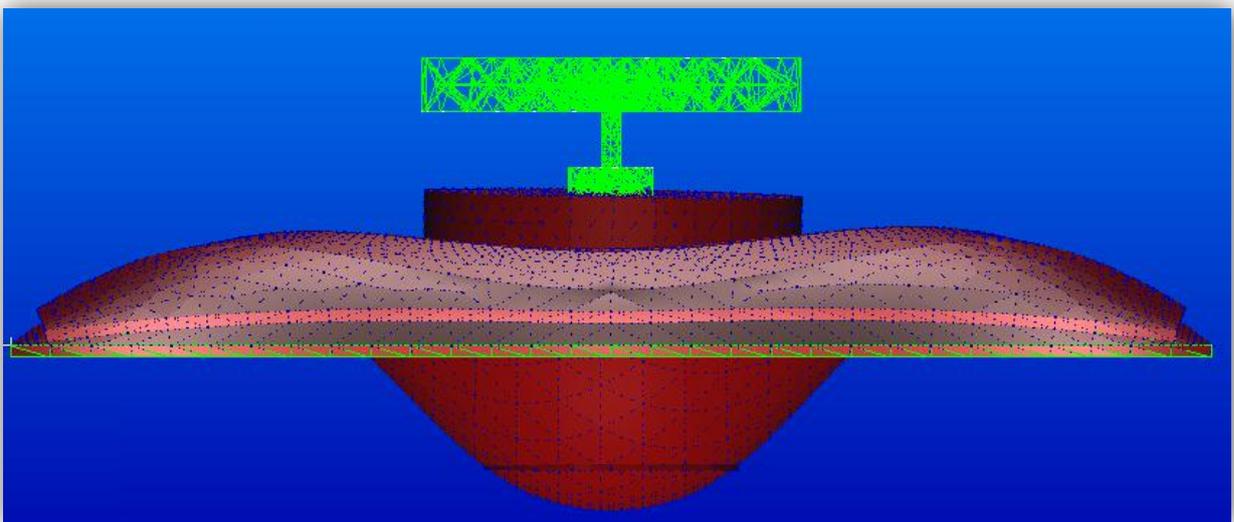


Figura 35 - Modo 5, Vista frontale

8.1 Considerazioni sull'analisi della piastra strumentata

Le osservazioni più evidenti che si possono fare riguardano certamente l'effetto di riduzione delle frequenze che si riscontra e che non giunge inatteso. La presenza della massa della strumentazione incrementa la massa globale del sistema e agisce direttamente nei punti di grande deflessione modificandone le componenti modali. E' importante richiamare alcune delle principali conseguenze dell'introduzione di un modello di massa tridimensionale, in contrapposizione a quello puntiforme usato nel Capitolo 5. Una differenza sostanziale riguarda il vincolo esercitato su tutti i gradi di libertà dei nodi cui è collegata, laddove la massa puntiforme sembra non interessare le rotazioni, agendo dunque solo sulle traslazioni.

E' possibile, inoltre, che un ruolo importante sia giocato dall'effetto d'inerzia dovuto alla particolare distribuzione di massa "fuori" dal piano di giacenza della struttura.

Un ultimo elemento distintivo riguarda l'ampiezza della base di raccordo fra strumentazione e piastra stessa che, ben lontana dall'essere l'unico punto trattato nel Capitolo 5, distribuisce in modo realistico l'effetto della massa anche su regioni che in un'analisi solo teorica potrebbero apparentemente essere considerate non influenzate.

Si nota, tuttavia, l'analogia rispetto a quanto evidenziato nel Capitolo 5. In quel caso, infatti, la presenza della massa sembrava avere una ridottissima influenza sul comportamento della piastra per tutti quei modi (ad es. i Modi 4 e 6) che presentano una deformazione circa nulla nel centro (punto di collegamento piastra-massa). Tale comportamento sembra mantenersi, come evidenziato dalle Tabelle 42 e 43.

Anche in questo caso si suggerisce un'indagine sperimentale di dettaglio che confermi o chiarisca tutti gli aspetti teorici evidenziati nel presente lavoro ma non approfonditi.

9 Analisi di una configurazione operativa

L'ultimo capitolo di questa trattazione riguarda il comportamento della piastra inserita in un contesto che simulasse quanto più possibile le condizioni operative.

Si è creato un modello semplificato di una configurazione che potesse essere ragionevole. Sulla base di quanto reperibile in letteratura ci si è orientati verso una configurazione cubica di cui la piastra rappresenta una faccia.

9.1 Modello FEM della configurazione indicata

Il modello implementato per questa prova è stato creato utilizzando elementi 2D *shell* per le piastre, del tutto analoghi a quelli introdotti nel Capitolo 2. Le aste di lega d'alluminio a cui sono imbullonate le piastre sono state simulate per mezzo di 12 elementi Beam (CBAR): elementi 1-dimensionali in grado di resistere a carichi assiali, torsionali e flessionali. Per la creazione delle Beam si è proceduto come segue:

Element Properties

Action: *Create*

Object: *1D*

Type: *Beam*

Input Properties

Nel tool di creazione delle sezioni si è realizzata l'apposita geometria quadrata piena, visionabile in Figura 36.

Dalla libreria dei materiali si è selezionato "Lega_Al" precedentemente creato, quindi si è provveduto ad orientare le diverse Beam inserendo l'opportuno vettore nel campo "Beam Orientation". La procedura corretta prevede di definire l'asse Y della sezione nel sistema di coordinate del database corrente.

In particolare i vettori usati sono:

$\langle 0, 1, 0 \rangle$ per le beam giacenti sul piano X-Z e sul suo parallelo;

$\langle 1, 0, 0 \rangle$ per quelle giacenti sul piano X-Y e sul suo parallelo;

Le proprietà Beam così definite sono poi state applicate agli elementi finiti 1D precedentemente creati lungo gli spigoli della configurazione scelta.

Le stesse geometrie sono poi state usate per creare le superfici e la mesh che costituisce le Shell.

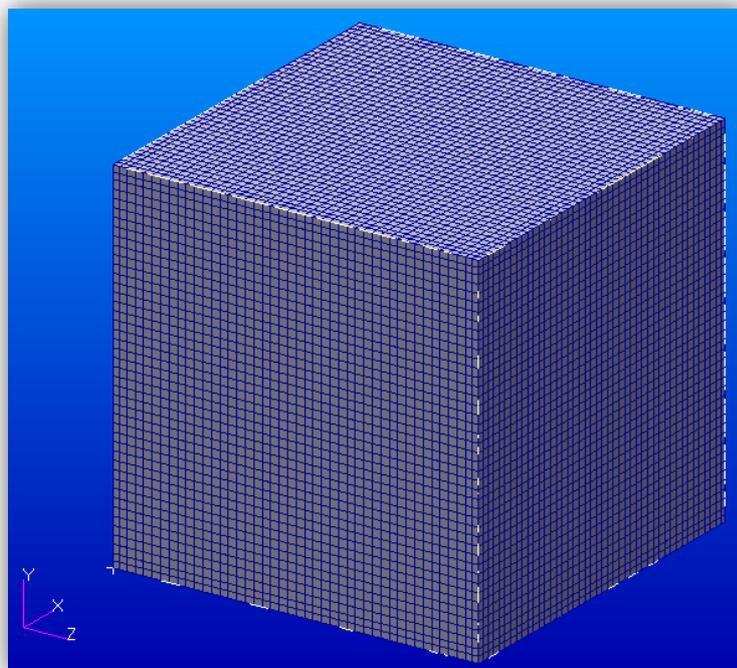


Figura 36 - Configurazione simulata

9.2 Analisi e considerazioni

Dopo aver applicato l'*equivalence* si è lanciata un'analisi "free-free", ovvero senza definire alcun vincolo. Le ragioni di questa scelta sono molteplici: in primo luogo essa offre dei risultati che ci daranno un'idea del probabile comportamento del sistema in condizioni operative; in secondo luogo, si attende che il Solution Type usato, Normal Modes, restituisca in questa configurazione delle frequenze di vibrazione proprie molto vicine, a meno di alcune imperfezioni valutate in seguito, alle frequenze di risonanza.

Nei risultati ottenuti si sono tralasciati i primi sei modi poiché rappresentativi, come ci si attendeva, delle traslazioni e delle rotazioni del corpo libero. I restanti modi calcolati sono visionabili in Tabella 44.

MODO	f Naturali [Hz]
1	483.72
2	569.68
3	648.83
4	1043.4
5	1108.1

Tabella 44

E' importante evidenziare, comunque, che i risultati ottenuti in questo capitolo non tengono conto di alcune particolari condizioni che possono essere le principali cause di differenze con comportamenti reali :

- Il tipo di connessione considerato non tiene conto della presenza di bulloni o viti che possono introdurre risposte diverse da quanto evidenziato con il tipo di collegamento imposto.
- Gli elementi Beam sono stati implementati in Patran in modo che il loro asse coincidesse con i bordi di contatto fra le Shell. Questo per motivi di

comodità nell'applicare una mesh unica ad una geometria da riutilizzare per i vari componenti al fine di ottenere una *equivalence* valida. L'offset che in realtà esiste per questi elementi potrebbe essere un'ulteriore causa di variazione e dovrebbe essere approfondito anche numericamente .

- Il Solution Type *Normal Modes* individua le frequenze proprie del sistema non smorzato dunque molto prossime a quelle, di risonanza, ottenibili lanciando un'analisi del sistema in *Frequency Response* che includa anche l'effetto dello smorzamento strutturale presente. Tuttavia una componente di smorzamento viene solitamente introdotta in quel Solution Type, si tratta di uno *structural damping coefficient* di entità piuttosto modesta per materiali metallici, ma non trascurabile in caso di sistemi composti da più corpi a contatto. Anche questo aspetto rimane tra quelli da approfondire mediante indagini specifiche che ne evidenzino gli effetti sul comportamento globale del sistema.

Considerati questi elementi noti di imperfezione e l'approssimazione usata nella definizione dei materiali, il comportamento del modello può tuttavia essere considerato soddisfacente, quantomeno in fase di avanprogetto e ai fini del presente lavoro di tesi.

10 Conclusioni

Le analisi svolte nello studio presente hanno evidenziato problematiche e criticità tipiche di chi si applica a studiare il comportamento dinamico di elementi strutturali tramite software di calcolo FEM. Per questo si è affiancata ad ogni sezione uno studio parallelo che considerasse un approccio teorico ed analitico prima di culminare nei casi trattati nei Capitoli 6, 7 ed 8 che possono essere visti come più realistici.

Durante il lavoro preliminare presentato nei primi capitoli, infatti, si sono effettuati i confronti necessari per affinare le tecniche utili a validare i modelli che si creavano, puntualmente usati di volta in volta come base per gli step successivi. Solo una volta sicuri che ogni elemento di criticità fosse stato affrontato ottenendo un risultato in buon accordo con la teoria, si è pervenuti alla parte della trattazione di interesse pratico.

Nell'analisi della Piastra si sono considerati solamente gli strati con spessore tale da poter essere ragionevolmente trattati con elementi solidi, ben consci che l'implementazione di tutti gli elementi realmente presenti nella piastra, oltre ad offrire un contributo molto modesto al comportamento strutturale, avrebbe portato con molta probabilità ad un fallimento da parte del codice di calcolo.

Le simulazioni così condotte hanno spesso evidenziato degli andamenti previsti e deducibili a priori, ma anche e soprattutto dei comportamenti diversi che offrono un'interessante spunto di riflessione per ogni futura applicazione del componente studiato.

Per quanto riguarda lo studio della piastra presentato nel Capitolo 7, ad esempio, si è evidenziato un inatteso irrigidimento da imputarsi quasi sicuramente all'elemento toroidale, con un contributo marginale del rivestimento/cornice.

Si è poi osservato, nel Capitolo 8 la riduzione indotta dalla strumentazione collegata al centro della piastra. Tale riduzione riguarda infatti tutti i modi di vibrare, seppur con un'influenza maggiore per quei modi che interagiscono direttamente con la posizione delle masse aggiunte nella zona di collegamento.

Nel Capitolo 9 si è, infine, offerta una simulazione di una possibile applicazione reale, con analisi modale delle frequenze proprie e quindi in assenza di tutti quei parametri variabili che una struttura così complessa presenta. Tali dati potrebbero essere utilizzati per un confronto preliminare con un test sperimentale nel caso fosse eseguito in laboratorio.

Questo permetterebbe di tarare il modello FEM sulla base del dato sperimentale in modo da definire le caratteristiche modali del modello da utilizzare nei casi non ripetibili. Siamo consci che un modello sempre più accurato e preciso può essere realizzato, e che il numero di parametri implementabili offre un controllo pressoché totale del sistema da analizzare; ma abbiamo tuttavia sperimentato noi stessi la possibilità, in diverse occasioni, di scegliere fra più strade da seguire per giungere al risultato desiderato.

Nella convinzione che sia proprio questa la maggiore potenzialità dell'analisi strutturale mediante software di calcolo FEM, quella di poter scegliere il grado di precisione o complessità o immediatezza desiderate a seconda dello stadio di progetto cui si sta lavorando, ci sentiamo di considerare lo studio presente come un utile punto di partenza per qualunque successiva analisi dinamica debba condursi su componenti strutturali per un impiego nel panorama dei sistemi aerospaziali moderni.

Ai fini di una veloce e più pratica consultazione del lavoro presente verranno proposti di seguito i tabulati con i risultati più interessanti ottenuti.

Piastra vincolata con appoggio semplice lungo i bordi

Materiali:

	E [MPa]	ν	ρ [Kg/m ³]
Lega di Alluminio	72000	0,33	2810
Rame	111000	0.33	8960
isolante	24132	0.136	1850

Si ricorda inoltre che:

la configurazione “**Tipo1**” è costituita da una piastra quadrata in lega di alluminio in queste tabelle riassuntive si fa riferimento alla seguente geometria: lato $a=0.165\text{m}$ con spessore $h=1.6\text{mm}$ (per piastre di altre dimensioni vedere i Capitoli 3 e 6);

la configurazione “**Tipo2**” è costituita da una piastra identica a quella di Tipo1 cui sono stati aggiunti un toroide in rame di spessore leggermente superiore a quello della piastra stessa ed uno strato in composito isolante che occupa lo spazio all’interno ed all’esterno del toroide stesso (piastra di dimensioni intermedie fra quelle trattate. Per una panoramica completa vedere il Capitolo 7);

la configurazione “**Tipo2+Massa**” fa riferimento ad una piastra di Tipo2 su cui viene posizionata una massa che simula una generica strumentazione. In questo riassunto si presentano i dati relativi ad una massa di 60g, altre prove effettuate sono visionabili nel Capitolo 8;

le tipologie di strutture per cui si erano svolte analisi su più modelli FEM diversi sono state rappresentate con valori medi fra quelli disponibili.

MODO	Tipo1 Mindlin	Tipo1 FEM
1	285.7	293.06
2	713.89	711.81
3	713.89	712.78
4	1141.65	1138.1
5	1426.58	1425.87
6	1426.58	1442.7
7	1853.62	1844.47
8	1853.62	1848.53
9	2564.39	2389
10	2564.39	2423.8

Tabella 45 - Tabella riassuntiva piastra semplice, Appoggio [Hz]

MODO	Tipo2 FEM	Tipo2 + Massa(60g)
1	466.135	319.18
2	1067.15	451.27
3	1067.4	451.74
4	1618.55	1774.4
5	2132.7	1696.7
6	2100.85	2393.9
7	2626.45	2838
8	2654.1	2913.2
9	3638.3	/
10	3648.5	/

Tabella 46 - Tabella riassuntiva piastra Tipo2 e Tipo2+Massa, Appoggio [Hz]

Piastra vincolata con Incastro lungo i bordi

MODO	Tipo1 Leissa	Tipo1 FEM
1	511.72	522.14
2	1062.81	1064.43
3	1062.81	1064.5
4	1566.8	1567.83
5	1919.03	1906.566667
6	1919.03	1917.4
7	2396.64	2387.13
8	2396.64	2388.77
9	3066.69	3049.57
10	3066.69	3050.37

Tabella 47 - Tabella riassuntiva piastra semplice, Incastro [Hz]

MODO	Tipo2 FEM	Tipo2 + Massa(60g)
1	794.075	522.28
2	1514	482.89
3	1514.5	485.16
4	2228	2580.6
5	2619	/
6	2794.15	3226.7
7	3457.3	3961.3
8	3458	3946.6
9	4388.85	/
10	4390.05	/

Tabella 48 - Tabella riassuntiva piastra Tipo2 e Tipo2+Massa, Incastro [Hz]

Analisi di un'applicazione in struttura cubica

L'analisi della configurazione descritta nel Capitolo 9 è stata condotta con le seguenti specifiche:

6 Piastre: 165x165x2mm – Lega di Alluminio – 50x50 elementi 2D “Thin Shell”

12 Rods: 155mm Sez:6x6mm – Lega di Alluminio – 46 elementi 1D “Beam”

Collegamenti fra entità: *equivalence* ai nodi

Vincolo: free-free

I risultati riportati sono riferiti alle prime frequenze proprie non nulle, estratte nell'ordine di stampa presentato dal Software.

MODO	f Naturali [Hz]
1	483.72
2	569.68
3	648.83
4	1043.4
5	1108.1

Tabella 49

11 Bibliografia

- [1] R. Bares, *Calcolo di lastre e piastre con la teoria elastica lineare*, Trad. di Franco Mola. Milano, CittàStudi. [tit. orig. Tabulky pro výpočet desk a stěn] (1996)
- [2] S. Chakraverty, *Vibration of Plates*, Boca Raton, Taylor & Francis Group (2009)
- [3] P.A.A. Laura, C.P. Filipich & V.H. Cortinez, *Vibration of Beams and Plates carrying concentrated masses*, London, Journal of Sound and Vibration, Academic Press Inc. 117(3), 459-465 (1987)
- [4] A. W. Leissa, *Vibration of Plates*, Washington, D.C., Scientific and Technical Information Division, NASA SP-160 (1969)
- [5] K. M. Liew, C. M. Wang, Y. Xiang & S. Kitipornchai, *Vibration of Mindlin Plates*, Kidlington, Elsevier Science (1998)
- [7] J. W. Nicholson & L.A. Bergman, *Vibration of thick plates carrying concentrated masses*, London, Journal of Sound and Vibration, Academic Press Inc. 103(3),357-369 (1985)
- [8] R. Szilard, *Theories and Applications of Plates Analysis: Classical, Numerical and Engineering Methods*, Hoboken, Jhon Wiley & Sons, Inc. (2004)
- [9] Y. Xiang & G.W. Wei, *Exact solutions for buckling and vibration of stepped rectangular Mindlin Plates*, Internal Journal of Solids and Structures, Elsevier 41,279-294 (2004)
- [10] J.S. Wu & S.S Luo, *Free vibration analysis of a rectangular plate carrying any number of point masses and translational springs by using the modified and quasi-analytical and numerical combined methods*, Internal journal for numerical methods in engineering, John Wiley & Sons, Inc. 40,2171-2193 (1997)
- [11] MSC.Software Corporation, *Patran 2010 Reference Manual*, www.mscsoftware.com MSC.Software Corporation
- [12] Comunicazioni personali con il Prof. Reyneri
- [13] Sito Internet Easa
http://www.esa.int/esaMI/Education/SEMOQNSXXXG_0.html

[14]Sito internet AMSAT <http://www.amsat.org/amsat-new>

[15] Sito internet R O B U S T A http://www.ies.univ-montp2.fr/robusta/satellite/IMG/pdf/PR_GN_2010.06.03_firstborn_french_modular.pdf

[16] Sito internet PW-Sat <http://www.pw-sat.pl/>

Ringraziamenti

Innanzitutto desidero esprimere la mia gratitudine al Prof. Frulla per la sua guida, per la sua grande disponibilità e per la pazienza dimostrata nel seguirmi in questi ultimi mesi.

Desidero, inoltre, ringraziare il Prof. Reyneri per avermi dato modo di misurare con applicazioni “pratiche” le conoscenze e le competenze acquisite durante la stesura di questo lavoro.

Ringrazio ancora con affetto i miei genitori e mio fratello, per avermi sostenuto con sacrifici e con fiducia durante questo mio percorso.

Infine desidero ringraziare di cuore Elena ed i miei amici, per il loro aiuto ed incrollabile supporto.

Lorenzo