

I FACOLTA' DI INGEGNERIA

Corso di laurea magistrale in ingegneria aerospaziale



Analisi termica e modale di componenti multifunzionali del
modulo satellitare Aramis

Relatori:

Prof. L. Reyneri
Ing. M. Gherlone

Candidato:
Marino Alessio

*Saranno anche i guerrieri a conquistare la gloria,
ma sono gli ingegneri che costruiscono la società.*

[Star Trek: Voyager]

INDICE

Cap 1 Introduzione.....	7
1.1 Aramis.....	7
Cap 2 Configurazioni possibili per la tile.....	10
2.1 Geometrie generali	11
2.2 Fissaggio ai correnti.....	16
2.3 Vincoli.....	18
2.4 Configurazione 8L.....	20
2.5 Configurazione 3L.....	23
2.6 Configurazione Sandwich.....	25
Cap 3 Analisi modale.....	30
3.1 Teorie agli spostamenti per piastre multistrato.....	32
3.1.1 CLT- Classical lamination theory.....	37
3.1.2 FSDT – First order shear deformation theory.....	38
3.1.3 Modelli zig-zag.....	39
3.2 Ortotropia degli strati.....	42
3.3 Legge di Hooke per materiali ortotropi.....	43
3.4 Costanti ingegneristiche per materiali ortotropi.....	46
3.4.1 Matrice delle rigidezze ridotte.....	49
3.5 Analisi modale configurazione 8L.....	50
3.5.1 Determinazione analitica.....	50
3.5.2 Metodo di Leissa per pannelli rettangolarmente ortotropi incastrati ai bordi.....	51
3.5.3 Calcolo FEM 2D.....	53
3.6 Analisi modale configurazione SANDWICH.....	56
3.6.1 Determinazione analitica.....	56
3.6.2 Equazioni di equilibrio della piastra.....	61
3.6.3 Il problema dell’incastro – applicazione metodi variazional.....	62
3.6.4 Applicazione del metodo di Rayleigh-Ritz: determinazione della matrice delle masse [M].....	64
3.6.5 Applicazione del metodo di Rayleigh-Ritz: determinazione della matrice di rigidezza [K].....	69

3.6.6	Calcolo FEM - modello 2D laminated.....	68
3.6.7	Calcolo FEM – modello 3D.....	68
3.7	Analisi modale configurazione 3L.....	69
3.7.1	Determinazione analitica.....	71
3.7.2	Calcolo FEM 2D.....	72
Cap 4	Analisi dello spostamento trasversale al lancio.....	73
4.1	Modello Fem.....	73
4.2	Accelerazioni al lancio.....	73
Cap 5	Analisi Termica.....	74
5.1	Generalità sull’analisi termica di oggetti orbitanti.....	74
5.1.1	Radiazione solare.....	75
5.1.2	Albedo terrestre.....	75
5.1.3	Radiazione emessa da un corpo.....	75
5.1.4	Indici di assorbanza ed emissività di un corpo.....	76
5.2	Analisi termica di Aramis: equazioni generali d’equilibrio.....	77
5.3	Calcolo resistenze termiche per configurazioni 3L ed 8L.....	79
5.3.1	Resistenza termica tra centro e bordi della tile.....	79
5.3.2	Resistenza termica tra lati paralleli.....	80
5.3.3	Resistenza termica tra la faccia interna ed esterna.....	82
5.4	Calcolo dei differenziali di temperatura.....	84
5.4.1	Potenza termica Raggiunta.....	84
5.5	Modello termico per il sandwich.....	84
5.5.1	Determinazione della conducibilità effettiva del honeycomb.....	87
5.5.2	Differenziali di temperatura per il sandwich.....	91
Cap 6	Risultati.....	94
6.1	Analisi modale.....	94
6.1.1	Frequenze naturali e spostamenti massimi.....	94
6.1.2	Osservazioni sull’analisi modale.....	97
6.2	Analisi statica al lancio.....	98
6.3	Analisi termica.....	98
6.3.1	Differenziale di temperatura tra centro e bordi.....	98

6.3.2 Differenziale tra lati paralleli.....	99
6.3.3 Differenziale tra faccia interna ed esterna.....	99
Cap 7 Conclusioni.....	101
Cap 8 Appendice codici.....	102
Cap 9 Bibliografia.....	110
Ringraziamenti.....	111

1 INTRODUZIONE

Il presente lavoro è frutto di una collaborazione con il dipartimento di elettronica e telecomunicazioni ed ha lo scopo di analizzare il comportamento modale e termico di alcuni componenti multifunzionali presenti sul modulo satellitare Aramis, progetto sviluppato all'interno dell'ateneo sotto la guida del professor Reyneri.

Il progetto Aramis si riferisce alla realizzazione di un satellite low cost di tipo cubesat, caratterizzato dall'assemblaggio di componenti modulari multifunzionali pre-assemblati e pre-testati, che uniti fra loro da elementi strutturali di giunzione vanno a definire la forma parallelepipedica del satellite.

I "cubesat" sono satelliti cubici di piccole dimensioni ideati sul finire degli anni '90 nell'università americana Cal.Tec. con scopo di fornire una soluzione standard per il design di picosatelliti, in modo da ridurre costi e tempi di sviluppo e aumentare l'accessibilità alle missioni satellitari e la sostenibilità alla frequenza dei lanci.

Il progetto ha suscitato fin da subito grande interesse, sia in ambiente accademico che aziendale, tant'è che attualmente oltre 100 istituti nel mondo fra università, scuole ed imprese, sono coinvolti nel progetto cubesat col fine di sviluppare soluzioni strutturali sempre più efficienti e payload utili ai vari scopi specifici, con la speranza di poter vedere il loro cubesat in orbita.

Il progetto Aramis, iniziato nel 2007, ha come scopo principale quello didattico e diversi scopi secondari.

Esso viene proposto agli studenti che vogliono cimentarsi nella realizzazione di un progetto spaziale per apprendere quale siano i processi che portano al compimento di una missione satellitare, capire come applicare al meglio le soluzioni tecnologiche disponibili, far nascere nuove collaborazioni tra studenti, aziende e dipartimenti all'interno dell'ateneo, e sollecitare la ricerca di nuove soluzioni e tecnologie utili all'uopo. In più la possibilità di collaborazione al progetto è estesa anche a livello scolastico, in quanto anche diversi licei ed istituti secondari sono stati coinvolti nello sviluppo di un ulteriore payload da inserire sul satellite.

Oltre agli scopi didattici, la missione si pone il fine di far nascere collaborazioni fra l'ateneo ed il mondo delle aziende, rendere funzionante ed operativa la ground station presente nell'ateneo e testare il comportamento alle radiazioni di alcuni componenti hardware da poco presenti sul mercato, i quali andranno a definire il payload del satellite.

1.1 Aramis

Aramis presenta un'architettura innovativa inizialmente pensata per ridurre l'ingombro di satelliti di grosse dimensioni; esso infatti prevede il montaggio dei componenti hardware direttamente sui pannelli che ne definiscono la struttura, i quali vengono denominati "tiles".

Ogni tile rappresenta una delle sei superfici multi funzionali che definiscono la forma parallelepipedica del satellite. La caratteristica multifunzionale di queste superfici deriva dal fatto che ognuna, oltre ad assolvere la funzione strutturale, ha montati su di essa le schede circuitali ed i componenti hardware che di solito vengono montati nel volume interno del satellite, e quindi separatamente dagli elementi che ne definiscono la forma e le proprietà strutturali.

In questo modo si riesce a contenere in maniera molto efficace gli ingombri derivanti dalle schede hardware ed a ottenere un significativo volume vuoto al centro del satellite utilizzabile per altri scopi.



Figura 1- spaccato di Aramis

Aramis è costruito con quattro tiles laterali rettangolari di dimensione 330 x 165 mm destinate ad ospitare esternamente i pannelli solari ed internamente il payload, il power management system, il sistema di controllo d'assetto e i computer di bordo, e due tiles superiori quadrate di dimensione 165 x 165 mm destinate al sistema di telecomunicazione e scambio dati tramite un antenna UHF posta sulla superficie esterna, una SHF interna ed altri componenti hardware. Le tiles sono collegate tra loro da correnti profilati a L, attraverso i quali passano le viti di giunzione.

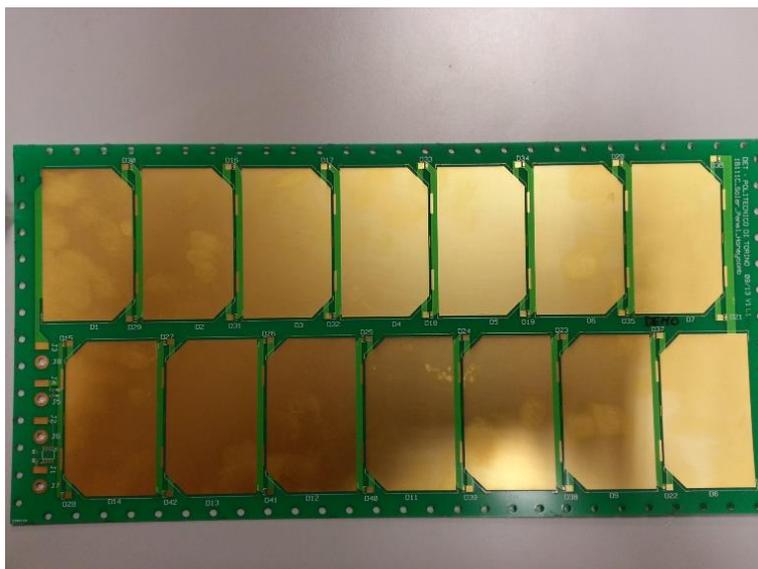


Figura 2- vista frontale PCB esterno della tile con supporti di montaggio celle

Il payload del satellite consiste in un set di schede hardware, sviluppate per testare in ambiente spaziale diversi microcontrollori da poco sul mercato e di alto interesse tecnologico per le future missioni spaziali.

Il test di questi componenti verrà effettuato inizialmente dal computer system di Aramis, il quale processerà continuamente i dati sul funzionamento di questi dispositivi e li invierà a terra, e successivamente dalla ground station, che ne analizzerà il comportamento in relazione al livello di radiazioni a cui è sottoposto il satellite. Le radiazioni sono causate essenzialmente da ioni pesanti e particelle cariche ad alta velocità, il cui livello d'intensità è misurato da alcuni componenti montati a bordo, nell'unità di misura SEU.

Dato lo scopo della missione, qualsiasi orbita LEO è adeguata, basta che vi sia sufficiente visibilità dalla ground station posta in Torino; questo significa che si dovranno evitare orbite sub-equatoriali con angolo d'inclinazione minore di 45° .

Il presente lavoro ha lo scopo di analizzare il comportamento termo-dinamico di una di queste tiles considerata in tre configurazioni strutturali diverse, e di valutare quale di queste soluzioni sia migliore o più efficiente in termini di massa, rigidità, e di isolamento termico dei componenti elettronici.

Per ognuna di queste tre configurazioni si determineranno le frequenze naturali di vibrazione trasversale della tile sia in modo analitico, attraverso diversi modelli ingegneristici approssimati, sia in modo simulativo tramite elementi finiti con implementazione in Nastran. Con lo stesso modello agli elementi finiti si determinerà il massimo spostamento trasversale della tile simulando la fase di lancio.

Successivamente si andrà a condurre l'analisi termica della tile per determinarne i differenziali di temperatura caratteristici in determinate condizioni di irraggiamento. Infine si valuterà quale configurazione della tile sia più efficiente in termini di rigidità strutturale, proprietà inerziale ed isolamento termico.

2 CONFIGURAZIONI POSSIBILI PER LA TILE

Per configurazione o soluzione strutturale della tile indichiamo l'architettura cui questa verrà realizzata. Essa è sostanzialmente una piastra multi-strato composta da diversi pannelli incollati fra loro, la quale dovrà assolvere il compito di resistere alle sollecitazioni termo meccaniche previste durante la missione ed essere sufficientemente rigida. Il pannello esterno e quello interno sono costituiti dalle schede circuitali; su quella interna vengono montati diversi componenti hardware, mentre su quella esterna i pannelli solari e la cover glass di protezione.

Nell'impostazione del modello e nel calcolo analitico delle frequenze naturali di vibrazione trasversale della tile, la cover glass e il pannello fotovoltaico non verranno considerati in quanto hanno spessori e proprietà meccaniche trascurabili rispetto ai pannelli più interni. Nella simulazione FEM, per ampliare l'analisi, verrà invece presa in considerazione anche la loro presenza.

Le configurazioni da analizzare per le tiles di Aramis sono tre e sono le seguenti:

- **CONFIGURAZIONE 3L:** la sequenza di pannelli incollati è la seguente, cover glass spessa 0,100 mm + pannello fotovoltaico spesso 0,150 mm + scheda circuitale in FR4 spessa 0,300 mm (nello spessore sono compresi cover glass e pannello fotovoltaico) + pannello d'alluminio spesso 1,6 mm + scheda circuitale in FR4 spessa 0,8 mm.
Si noti che trascurando la presenza dei pannelli fotovoltaici e della cover glass si è in presenza di un laminato ortotropo asimmetrico.
- **CONFIGURAZIONE SANDWICH:** cover glass spessa 0,100 mm + pannello fotovoltaico spesso 0,150 mm + scheda in FR4 spessa 0,300 mm + honeycomb in alluminio spesso 6,35 mm + scheda circuitale in FR4 spessa 0,8 mm.
Si noti come le schede circuitali costituiscano in questo caso le facce del sandwich e l'honeycomb la sua anima.
- **CONFIGURAZIONE 8L:** cover glass spessa 0,100 mm + pannello fotovoltaico spesso 0,150 mm + 8 schede circuitali di FR4 incollate insieme per uno spessore complessivo di 1,6 mm.
Si noti come trascurando la cover glass e il pannello si è in presenza di un laminato simmetrico ortotropo composto da un solo materiale.

Eventuali altri dettagli di ogni configurazione verranno presentati successivamente man mano che si analizzerà nel dettaglio ognuna di esse.

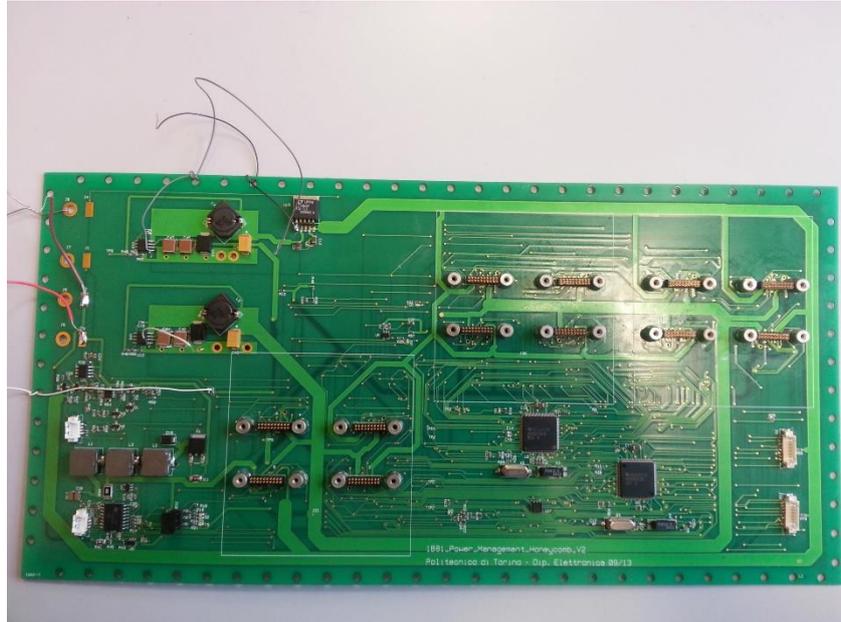


Figura 3- strato di PCB interno della tile

Prima di descriverle in dettaglio, vediamo quali sono le caratteristiche geometriche e di vincolo generali della tile.

Essa si presenta come una piastra multistrato di dimensioni in pianta di 165 x 330 mm e spessore variabile a seconda della configurazione. Vediamo sotto i disegni che la caratterizzano geometricamente; le quote sono espresse in metri.

2.1 GEOMETRIE GENERALI

Riportiamo le geometrie caratteristiche della tile e dei correnti a L sui quali questa viene montata.

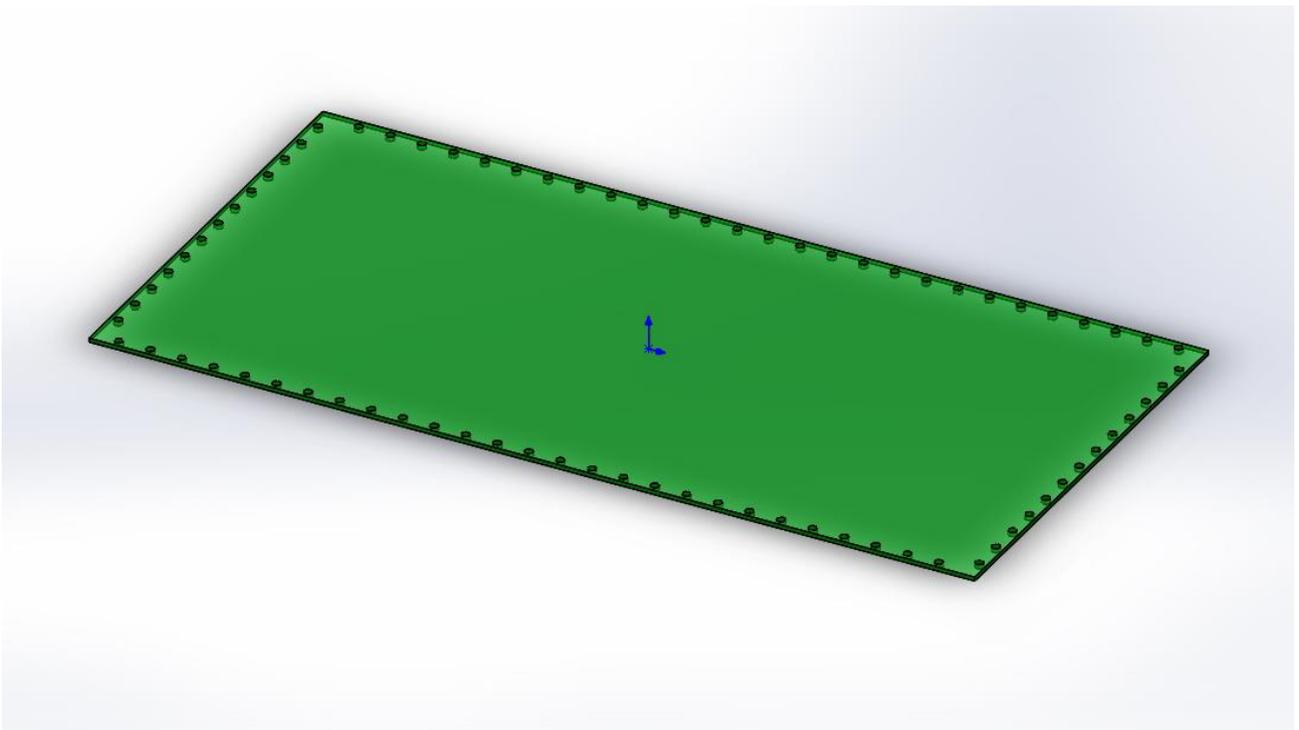


Figura 4- vista in assonometria della piastra

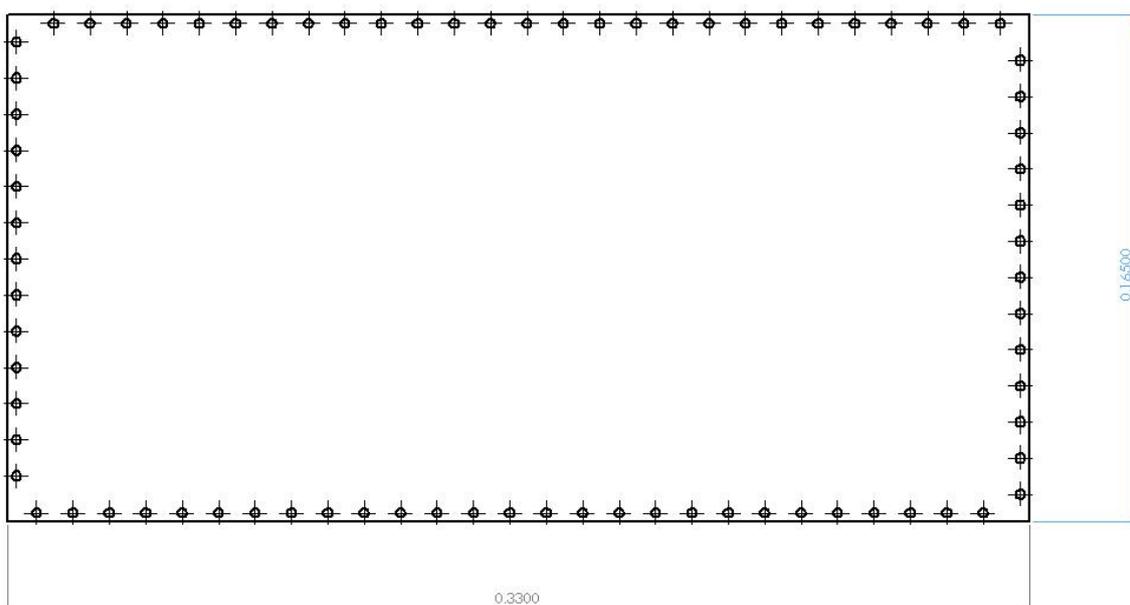


Figura 5- vista dall'alto e quote generali

Si riportano le geometrie dei pannelli e del loro posizionamento sulla tile.

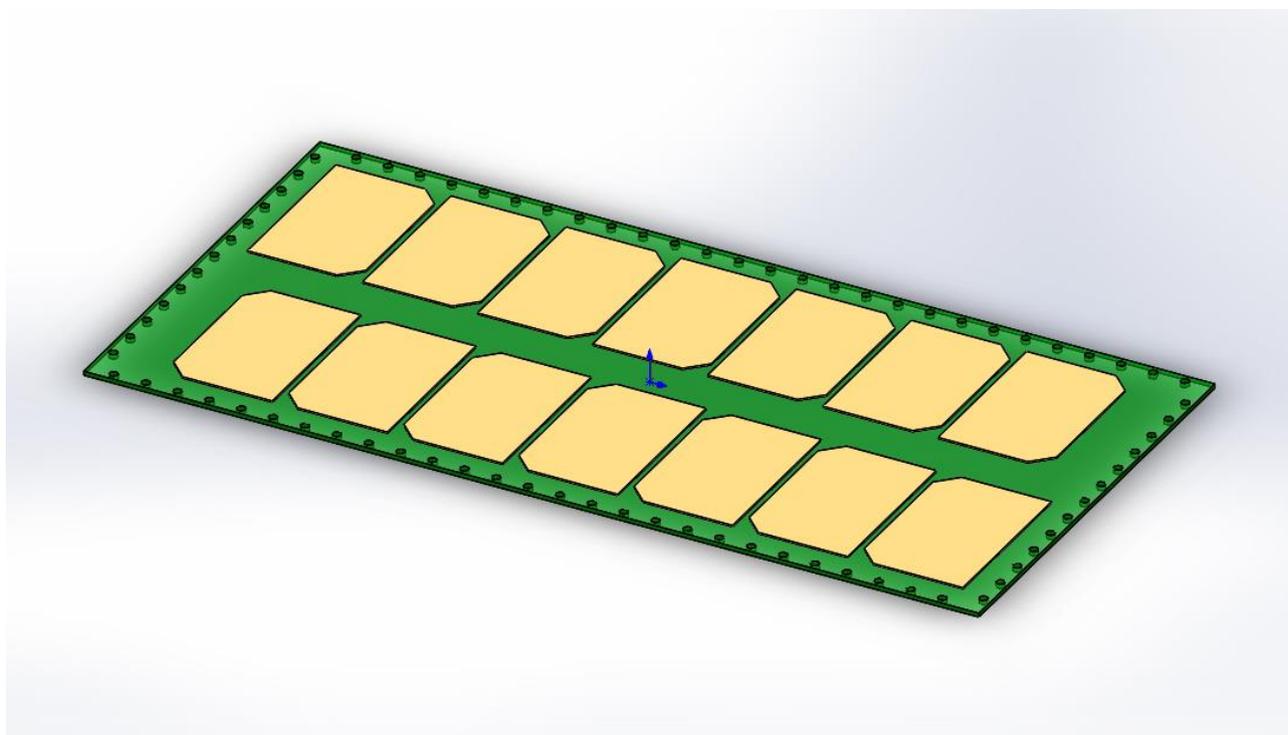


Figura 6- assonometria tile con pannelli

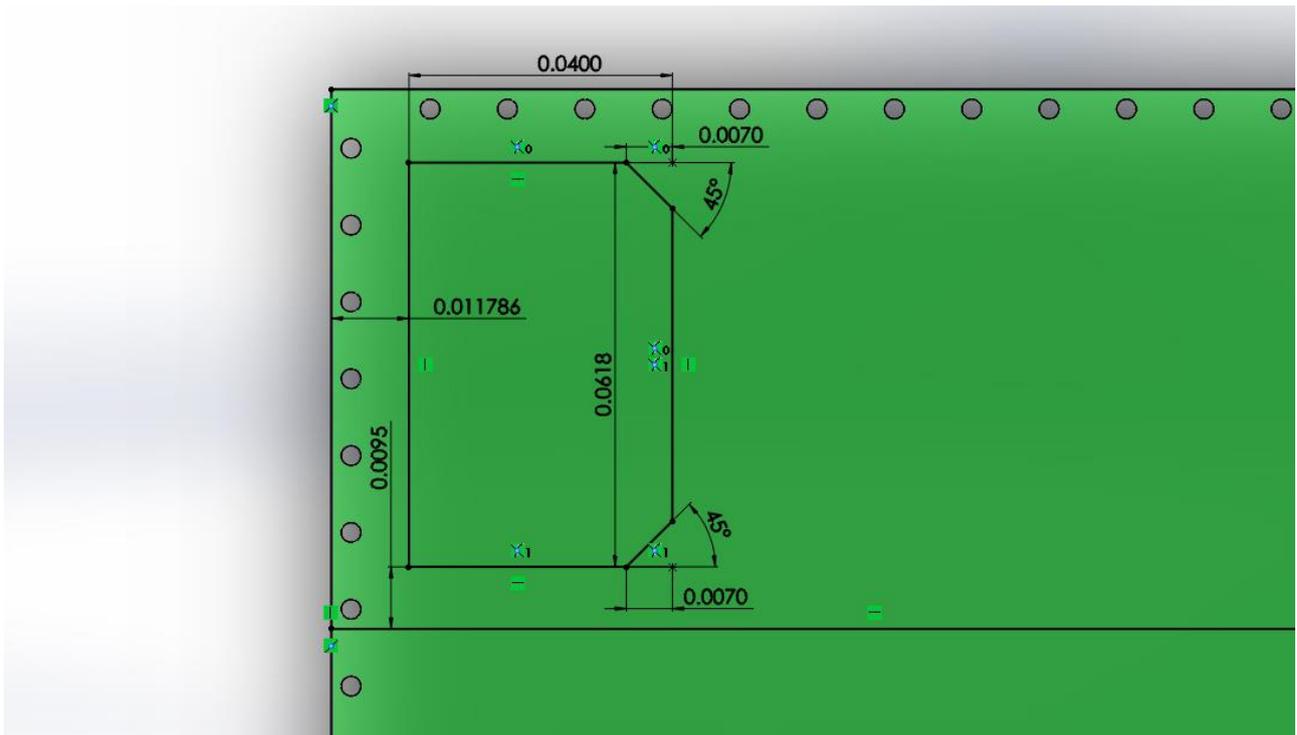


Figura 7- quotatura pannello

E le geometrie dei fori di fissaggio ai correnti.

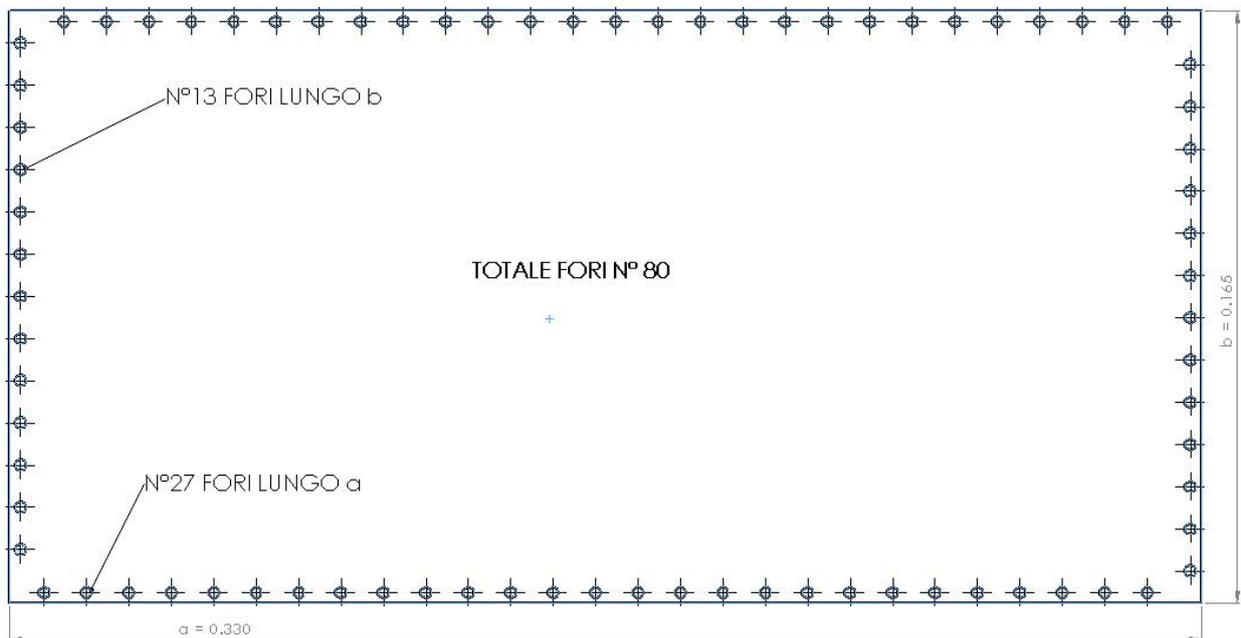


Figura 8- conteggio fori

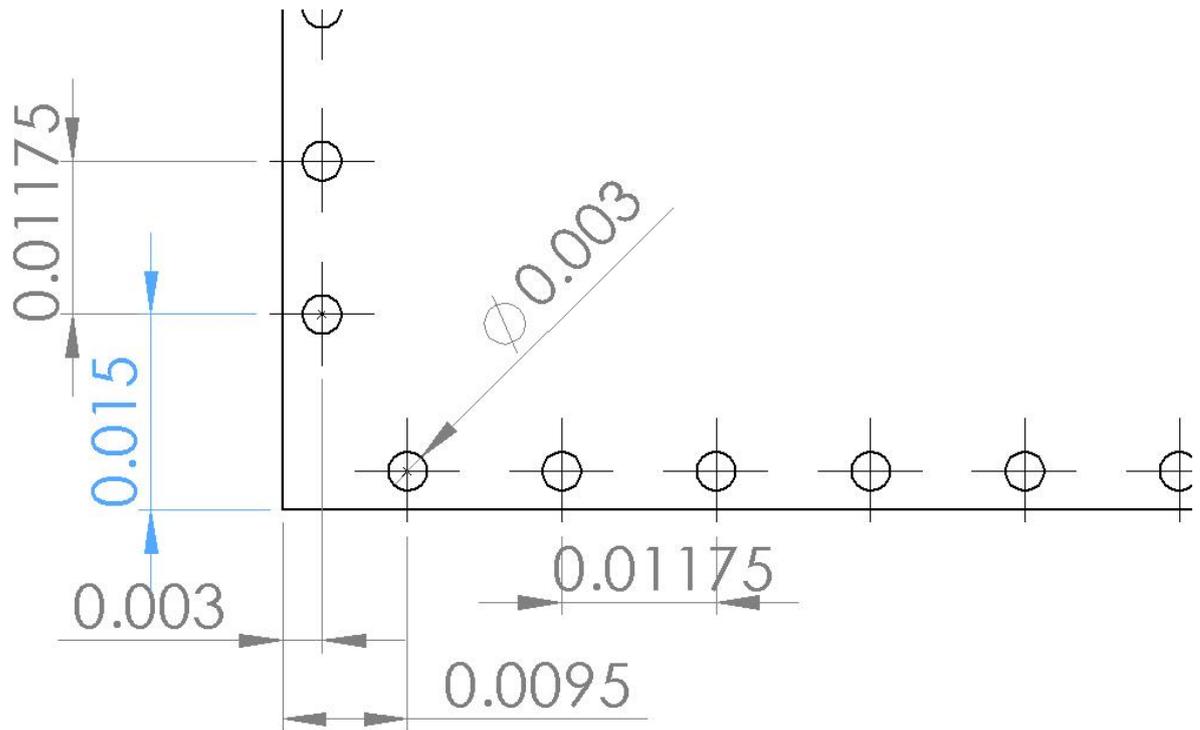


Figura 9- quotatura fori

I correnti a L lungo i quali viene fissata la tile si estendono per 318 mm nel lato lungo della piastra e 160 mm lungo il lato corto. Riportiamo le sole dimensioni caratteristiche del corrente posto sul lato lungo, dato che per quello corto sono le stesse.

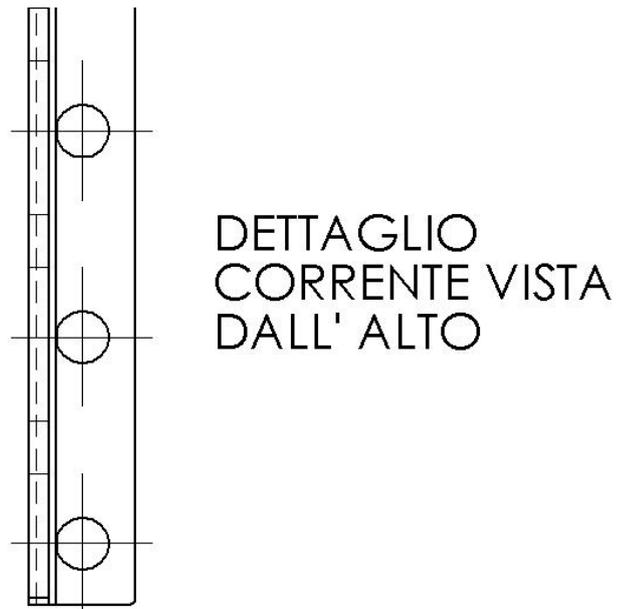


Figura 10- vista in dettaglio corrente dall'alto

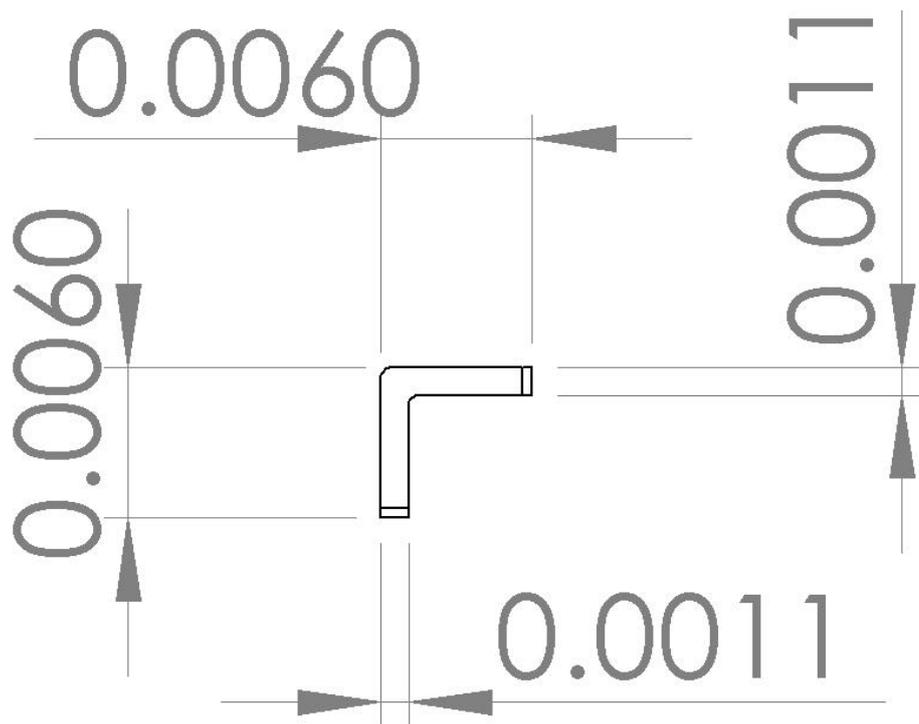


Figura 11- quote corrente

2.2 FISSAGGIO AI CORRENTI

Riportiamo i disegni che caratterizzano il montaggio della piastra ad uno dei suoi correnti tramite un solo bullone. Per questo tipo di caratterizzazione si è presa in esempio la configurazione 8L, dove la piastra ha uno spessore di 1.6 mm.

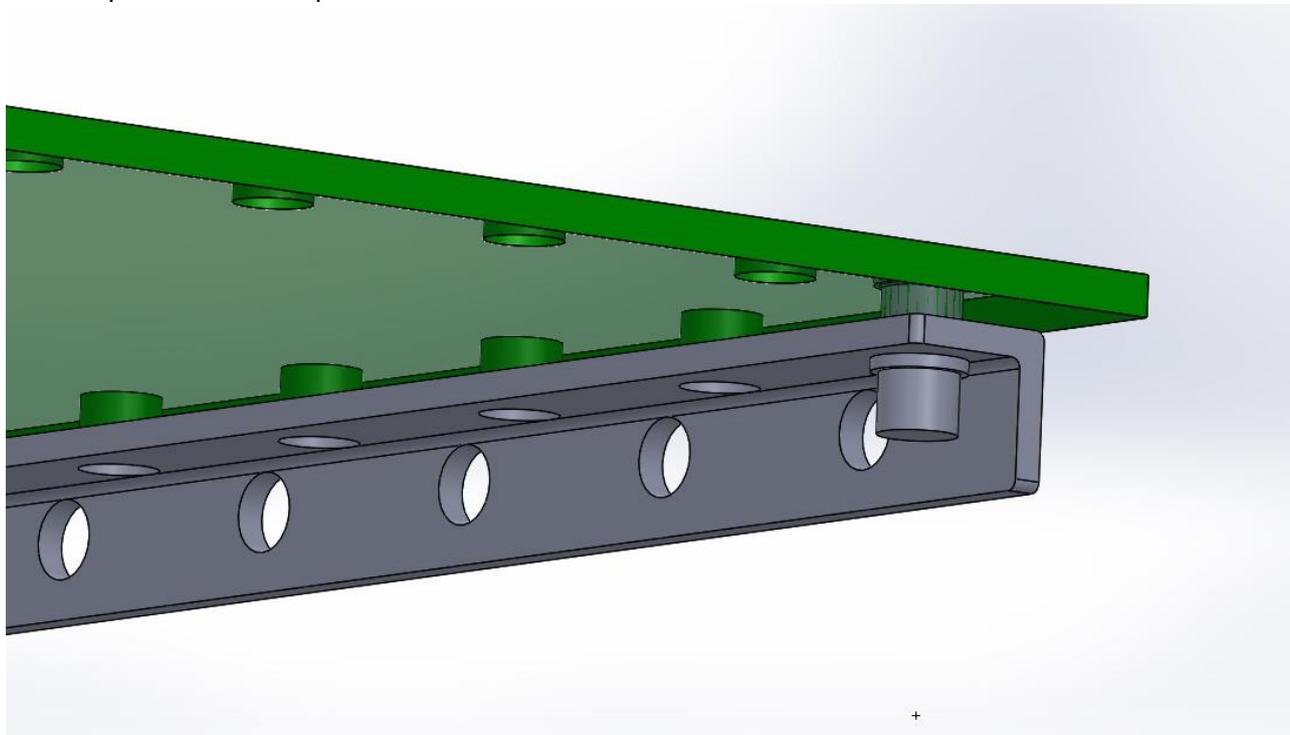


Figura 12- dettaglio in assonometria della giunzione

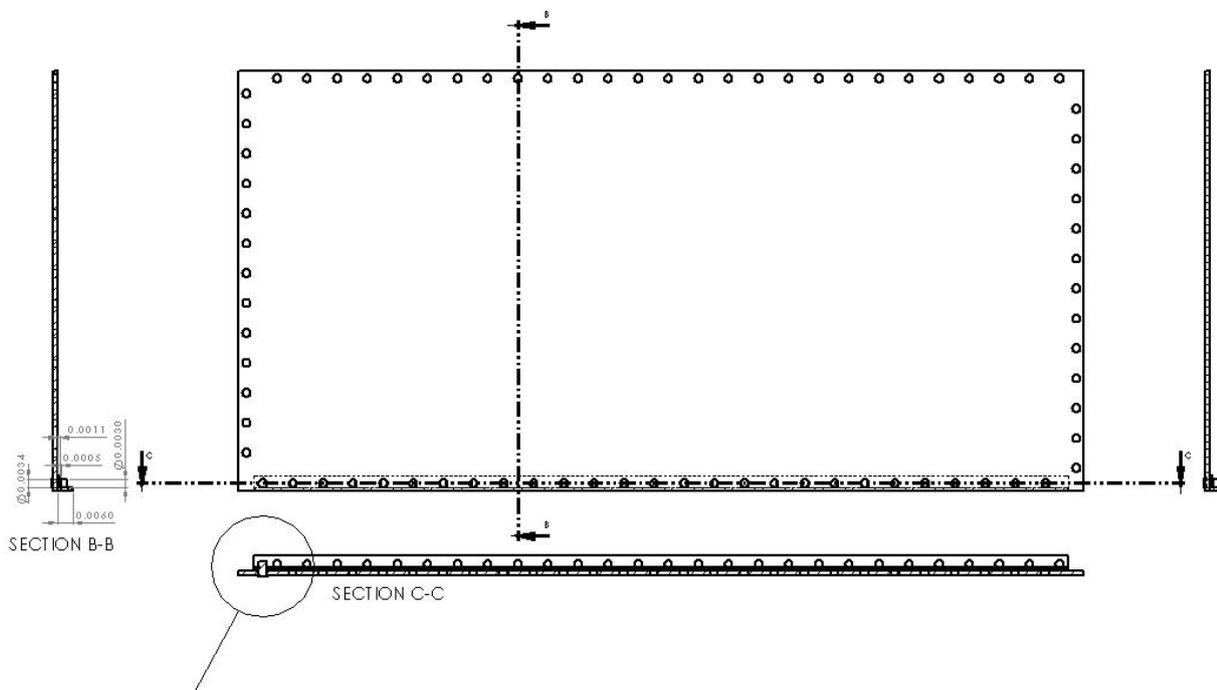


Figura 13- posizionamento corrente sul lato lungo

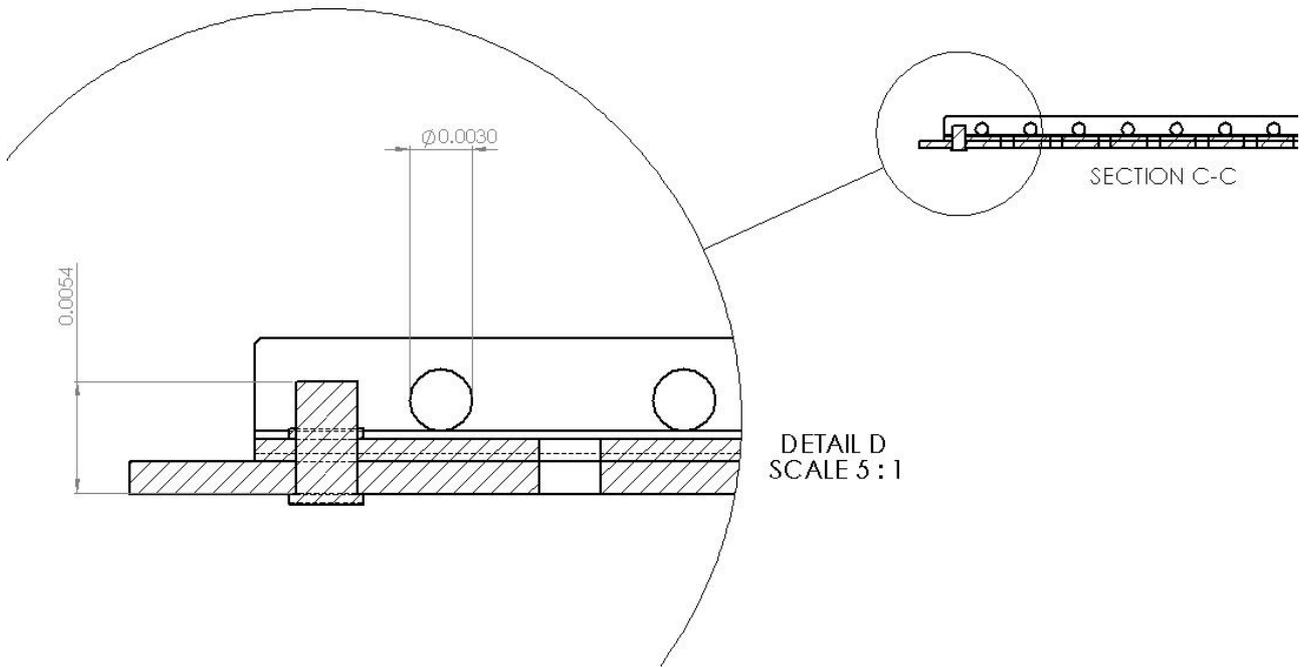
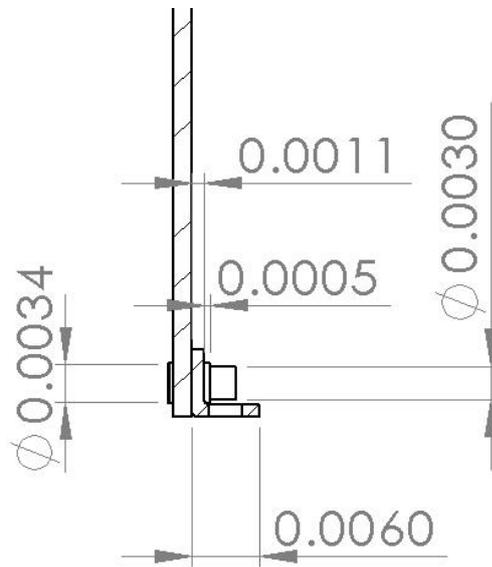


Figura 14- dettaglio giunzione



SECTION B-B

Figura 15- quotatura giunzione

2.3 VINCOLI

Dal disegno sotto notiamo che le estremità della tile alle quali sono fissati i correnti non possono ruotare; questo fa sì che il vincolo al quale è sottoposta la piastra lungo il perimetro sia riconducibile ad un incastro.

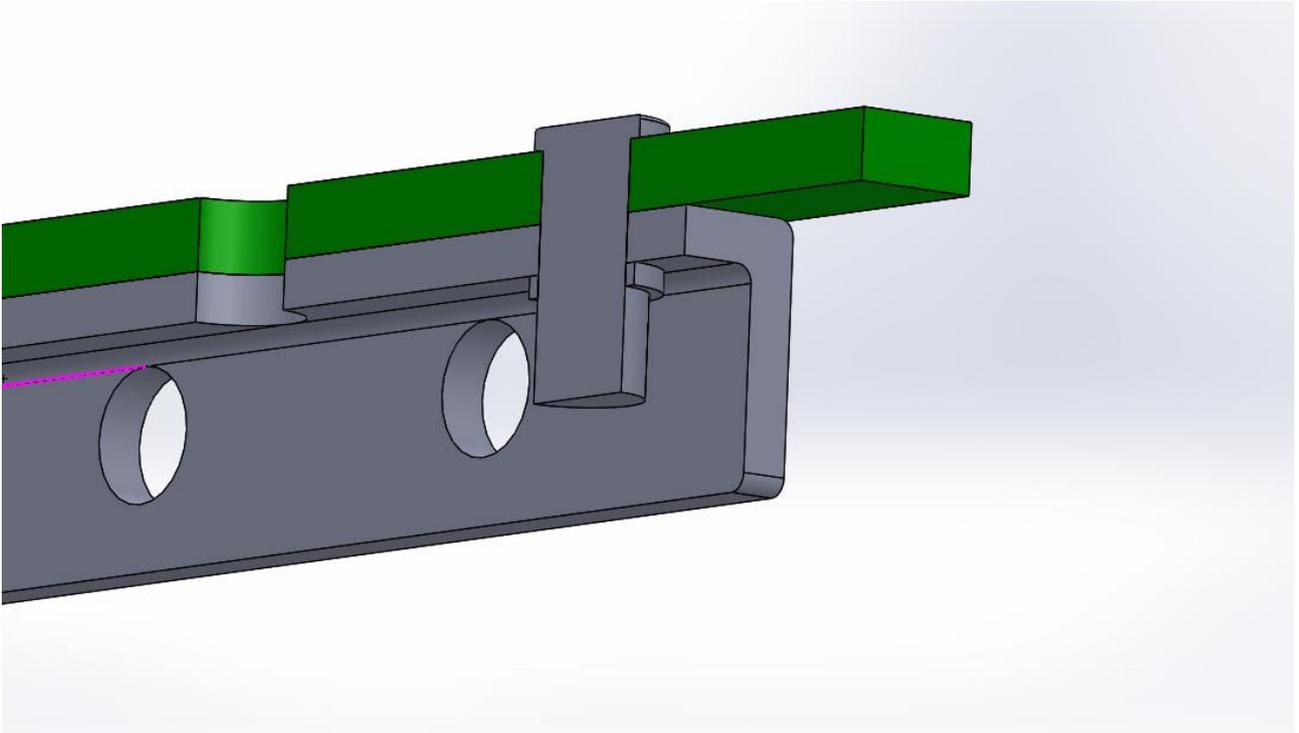


Figura 16- spaccato giunzione

Si noti che i fori di fissaggio sono interni alla piastra, e questo farà sì che la superficie da considerare nell'analisi modale sia inferiore a quella nominale di 165 x 330 mm. Scegliamo allora di considerare la porzione di piastra che arriva fino all'asse dei fori, avendo così una superficie per l'analisi modale di 159 x 324 mm.

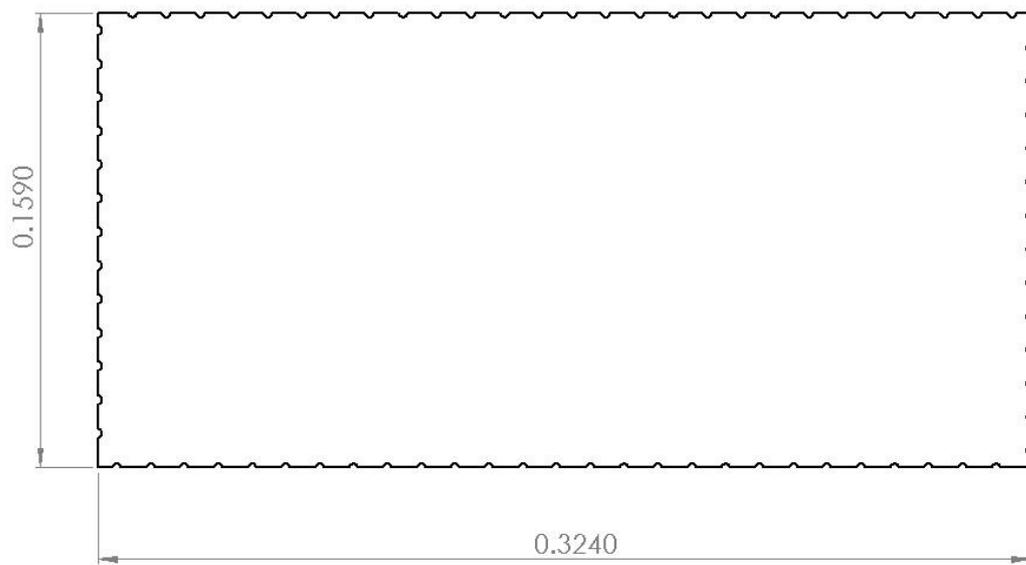


Figura 17- porzione di piastra da considerare nell'analisi modale

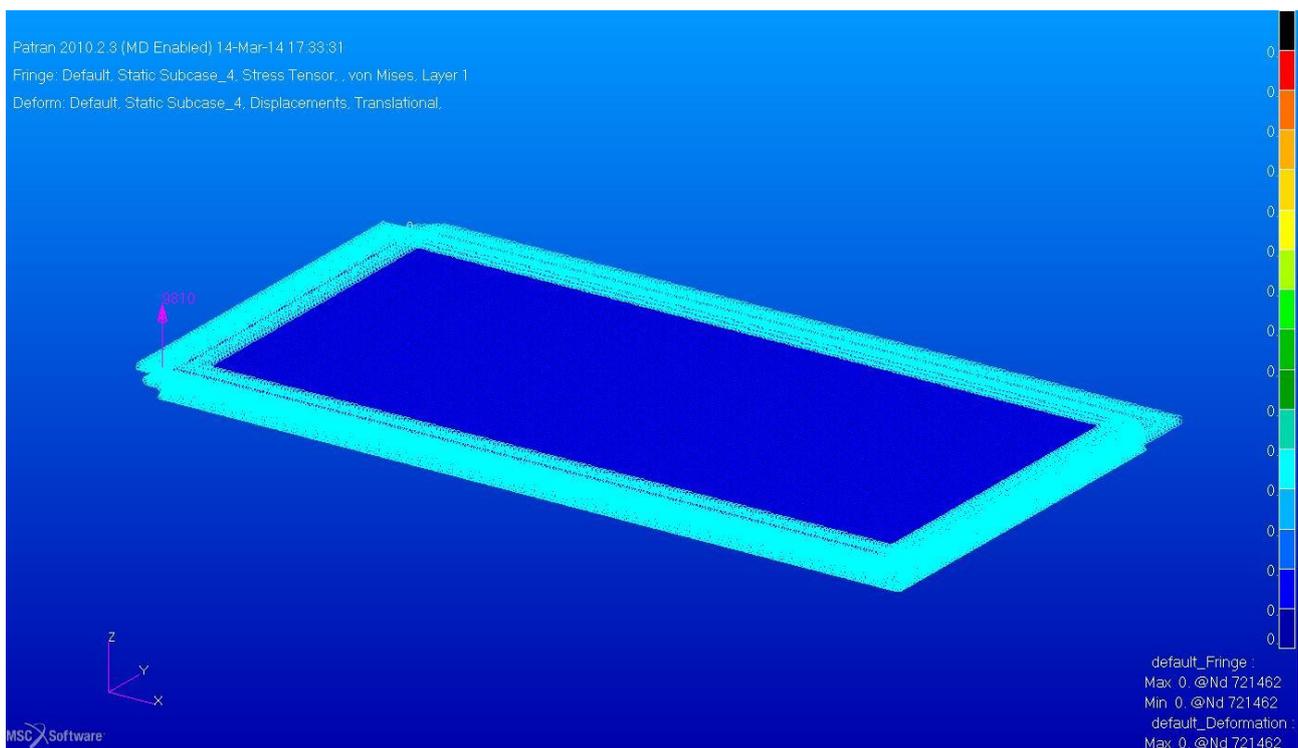


Figura 18- attribuzione dei vincoli con Patran

Vediamo nel dettaglio le configurazioni possibili per la tile di Aramis.

2.4 Configurazione 8L

La prima configurazione della tile presentata è quella realizzata da un blocco unico di 8 schede di PCB in FR4 incollate insieme per uno spessore complessivo di 1,6 mm. Il blocco viene incollato e venduto come prodotto finito dall'azienda tedesca Eurocircuits s.p.a..

All'azienda viene inviato lo schema circuitale della tile e i requisiti strutturali del prodotto finito, i quali determinano il numero di strati di PCB incollati insieme.

MATERIALI

L'FR4 è un materiale composito formato da una trama di fibre di vetro tenute insieme da una matrice di resina epossidica. E' praticamente un polimero termoindurente in cui vengono annegate delle fibre di vetro. E' utilizzato essenzialmente per la costruzione di circuiti stampati (PCB) e possiede notevoli proprietà termo-meccaniche in relazione al suo basso peso specifico.

Ve ne sono 5-6 tipologie in relazione al tipo di resina usata, all'utilizzo che se ne prevede e alla fabbrica costruttrice.



0Figura – Sezione di FR4 al microscopio

Quando viene usato come PCB è di solito è incollato ad un sottile strato di metallo chiamato copper. Lo strato tra FR4 e copper connette i componenti elettronici del circuito tra loro. Nel nostro caso i due copper, esterno ed interno, non verranno considerati nell'analisi in quanto presentano spessori molto ridotti (c.ca 0,015 mm l'uno).

Avendo acquistato i pannelli dall'azienda tedesca *Eurocircuits*, per le proprietà meccaniche dei nostri strati ci affidiamo ai dati tecnici che questa ci fornisce.

La tile in esame è assimilabile ad una piastra multistrato composta da pannelli di FR4, ortotropi bidimensionalmente, alla quale possiamo attribuire le seguenti caratteristiche:

$$\rho = 1,92 \text{ kg/dm}^3 = 1,92 \times 10^{-6} \text{ kg/mm}^3$$

$$E_1 = 24000 \text{ MPa}$$

$$E_2 = 20000 \text{ MPa}$$

$$E_3 = 20000 \text{ MPa}$$

$$G_{12} = 12000 \text{ MPa}$$

$$G_{23} = 12000 \text{ MPa}$$

$$G_{31} = 800 \text{ MPa}$$

$$\nu_{12} = 0,095$$

$$\nu_{23} = 0,095$$

$\nu_{31} = 0,138$

Dove per i coefficienti di poisson vale la relazione:

$$\frac{\nu_{ij}}{E_i} = \frac{\nu_{ji}}{E_j}$$

Per la determinazione analitica non si considererà l'influenza dei pannelli fotovoltaici e della cover glass, mentre nell'analisi FEM verranno presi in considerazione in un secondo momento per valutarne l'effetto sulle dinamiche della tile.

Riportiamo le proprietà meccaniche dei pannelli fotovoltaici in GaAs e della cover glass, entrambi isotropi.

$\rho_{cover} = 0,002605 \text{ Kg/mm}^3$

$E_{cover} = 75000 \text{ MPa}$

$\rho_{pannelli} = 0,00532 \text{ Kg/mm}^3$

$E_{pannelli} = 10000 \text{ MPa}$

GEOMETRIE 8L

Riportiamo i disegni con le quote caratteristiche di questa giunzione. Le quote sono espresse in metri.

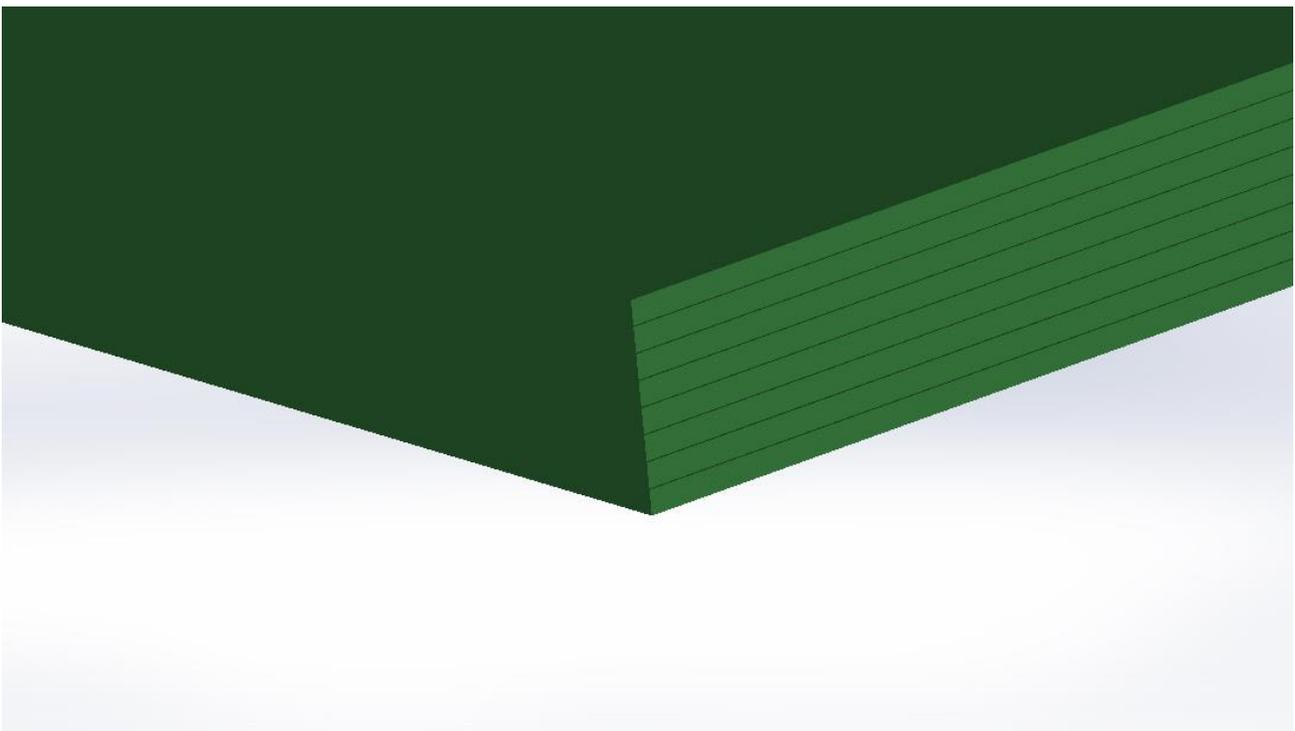


Figura 19- dettaglio assometrico stratificazione configurazione 8L

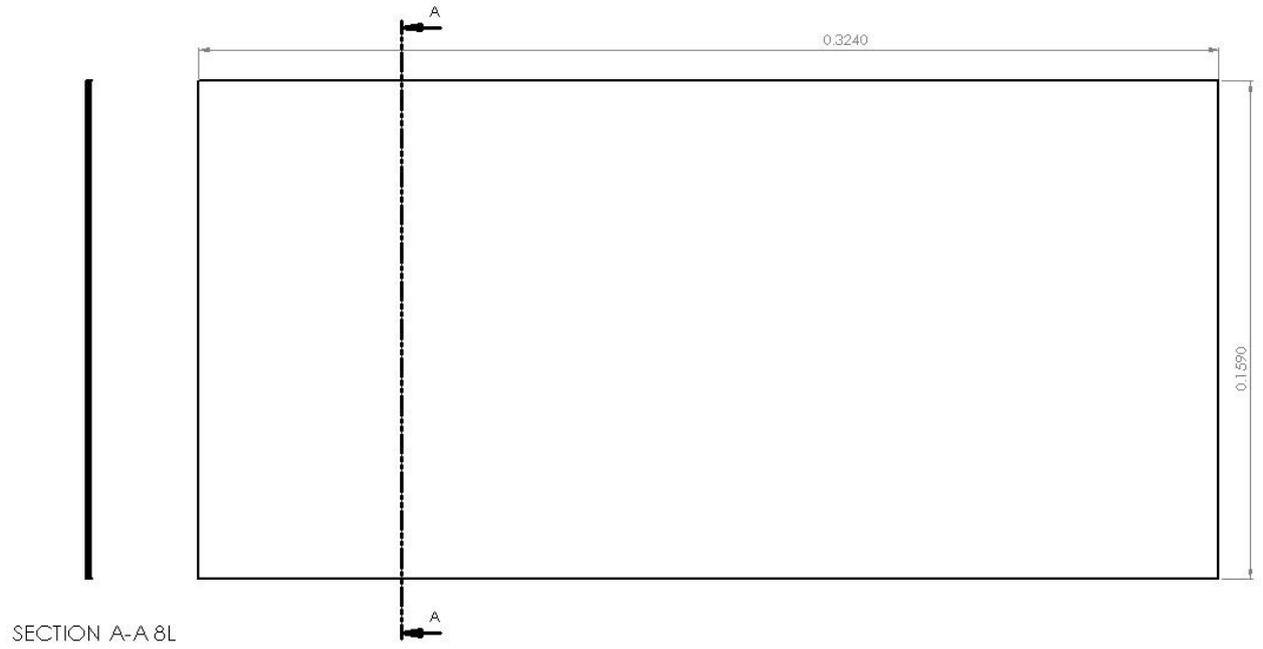


Figura 20- vista in pianta configurazione 8L

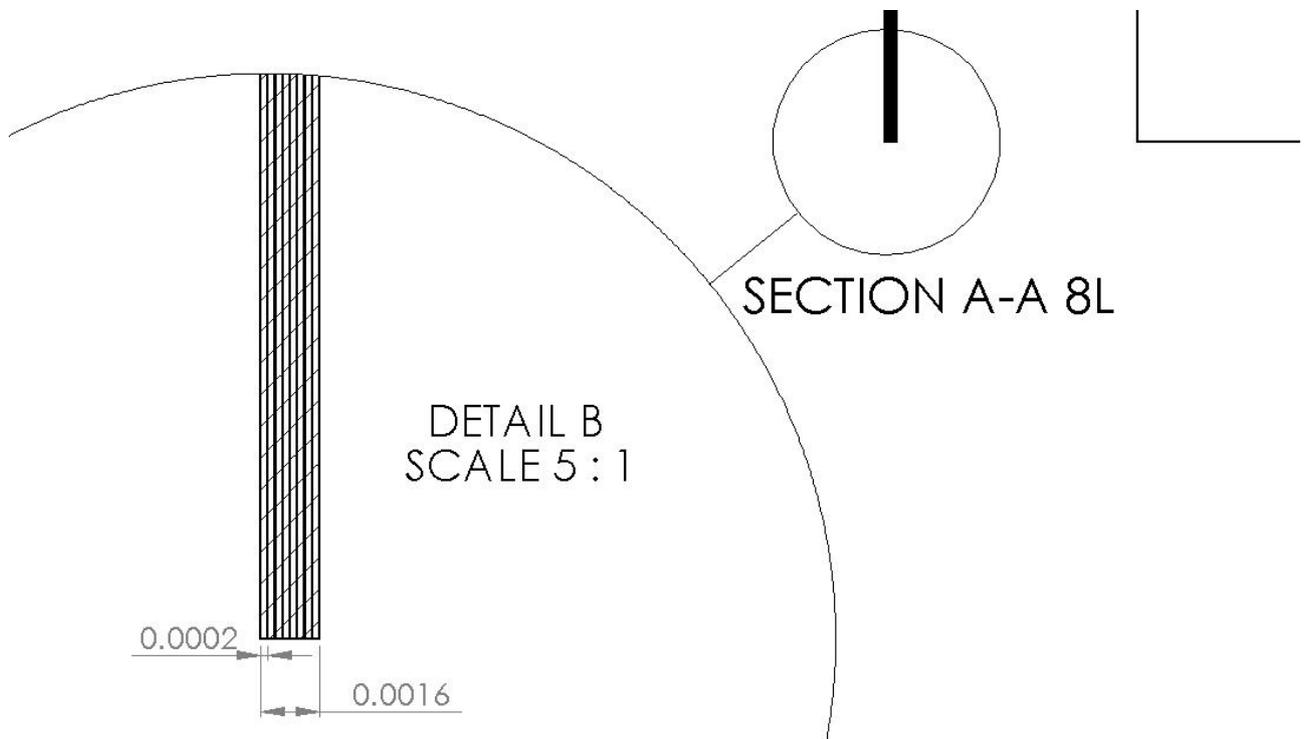


Figura 21- quote caratteristiche configurazione 8L

DATI GENERALI 8L

Riportiamo alcuni dati generali utili alle analisi di questa configurazione; essi sono le dimensioni in pianta, gli spessori con e senza pannelli, la superficie, le densità superficiali degli strati presenti e le masse con e senza pannelli fotovoltaici.

$$a=324 \text{ mm}$$

$$b=165 \text{ mm}$$

$$h_{\text{senza pannelli}}=1,6 \text{ mm}$$

$$h_{\text{tot}}=1,85 \text{ mm (escludendo resine, piste e copper)}$$

$$S=(330 \times 165)-(80 \times \pi \times 1,5^2)=53884,51332 \text{ mm}^2$$

$$\rho_{\text{superficiale}}=\rho \times h=0,000003072 \text{ kg/mm}^2$$

$$\rho_{\text{superficiale pannelli}}=0,000798 \text{ g/mm}^2$$

$$\rho_{\text{superficiale cover}}=0,0002605 \text{ g/mm}^2$$

$$M_{\text{senza pannelli}}=0,165533225 \text{ Kg}$$

$$M_{\text{add}}=0,057036757 \text{ Kg}$$

$$M_{\text{tot 8L}}=0,057036757 + 0,165533225 = 0,222569982 \text{ Kg}$$

2.5 Configurazione 3L

La seconda configurazione della tile presentata è quella realizzata dall'incollaggio di 2 schede di PCB in FR4 incollate al core in alluminio. Il blocco verrebbe incollato insieme nel dipartimento di elettronica.

MATERIALI 3L

Gli strati in PCB interno ed esterno sono fatti dello stesso FR4 ortotropo visto precedentemente:

$$\rho=1,92 \text{ kg/dm}^3=1,92 \times 10^{-6} \text{ kg/mm}^3$$

$$E_1=24000 \text{ MPa}$$

$$E_2=20000 \text{ MPa}$$

$$E_3=20000 \text{ MPa}$$

$$G_{12}=12000 \text{ MPa}$$

$$G_{23}=12000 \text{ MPa}$$

$$G_{31}=800 \text{ MPa}$$

$$\nu_{12}=0,095$$

$$\nu_{23}=0,095$$

$$\nu_{31}=0,138$$

Ci rimangono da definire soltanto le proprietà della lega d'alluminio usata come core di questa piastra. Questa è una lega isotropa 5052 fatta principalmente di alluminio e rame per uso aerospaziale; le costanti ingegneristiche sono:

$$E = 75000 \text{ Mpa}$$

$$\rho = 2,8 \text{ kg/dm}^3$$

$$\nu = 0,3$$

GEOMETRIE 3L

Riportiamo i disegni delle geometrie caratteristiche di questa configurazione. Le quote sono espresse in metri.

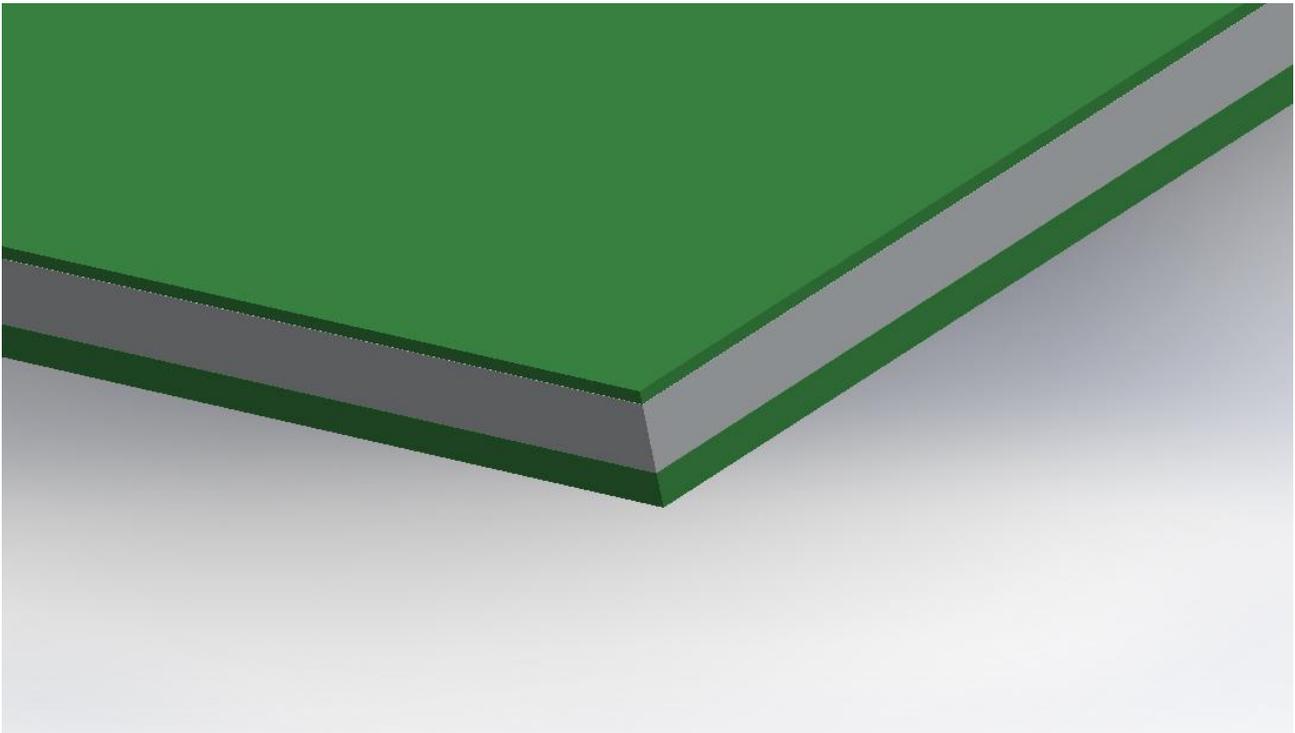


Figura 22- dettaglio assonometrico stratificazione 3L

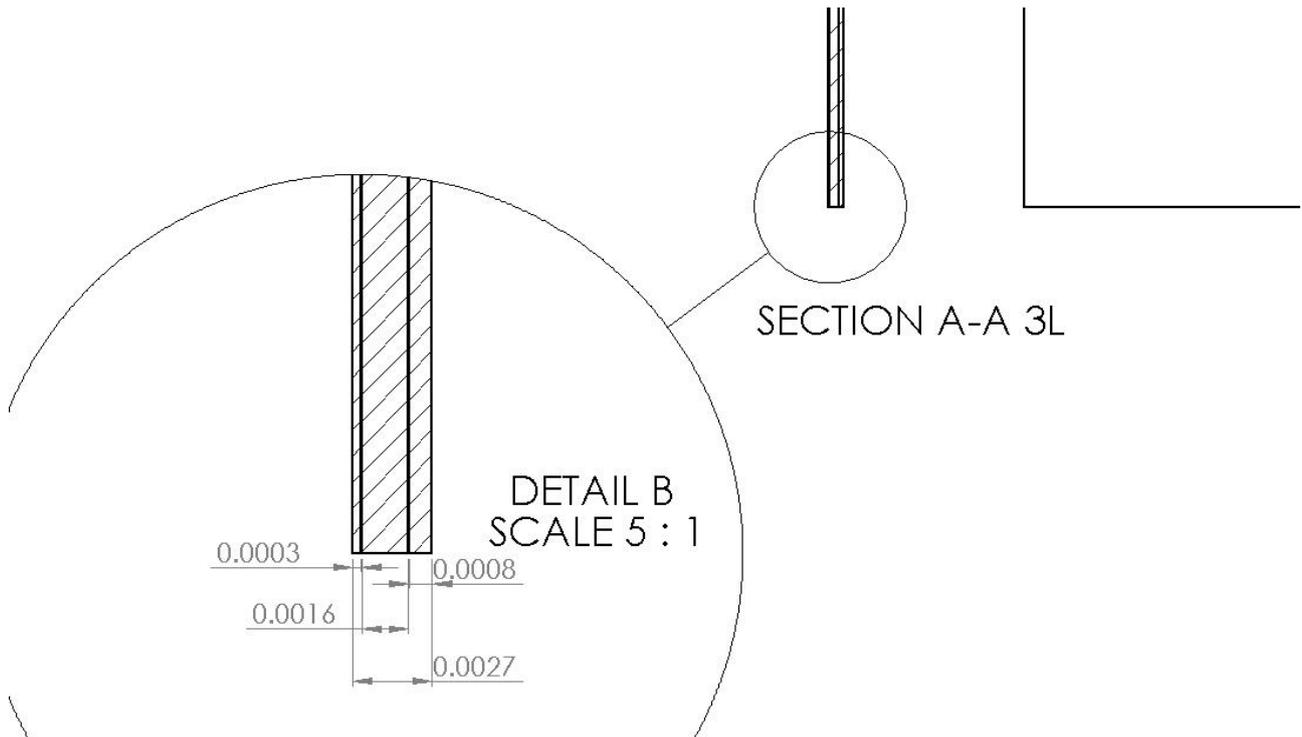


Figura 23- quote caratteristiche configurazione 3L

DATI GENERALI 3L

$a=324$ mm

$b=165$ mm

$h_{\text{senza pannelli}}=2,7$ mm

$h_{\text{tot}}=2,95$ mm (escludendo resine, piste e copper)

$S= (330 \times 165)-(80 \times \pi \times 1,5^2)= 53884,51332$ mm²

$\rho_{\text{superficiale}} = \sum (\rho \times h)_k = 0,000006592$ Kg/mm²

$M_{\text{senza pannelli}} = 0,355206712$ Kg

$M_{\text{add}} = 0,057036757$ Kg

$M_{\text{tot 3L}} = 0,057036757 + 0,355206712 = 0,412243469$ Kg

Notiamo che rispetto alle altre due, questa configurazione presenta una massa che è circa il doppio.

2.6 Configurazione SANDWICH

L'ultima configurazione della tile presentata è quella realizzata dall'incollaggio delle stesse 2 schede di PCB viste prima, incollate ad un core in honeycomb realizzato in lega d'alluminio. Anche questo blocco verrebbe incollato insieme nel dipartimento di elettronica.

MATERIALI SANDWICH

Per l'FR4 consideriamo le stesse proprietà meccaniche viste sopra:

$$\rho = 1,92 \text{ kg/dm}^3 = 1,92 \times 10^{-6} \text{ kg/mm}^3$$

$$E_1 = 24000 \text{ MPa}$$

$$E_2 = 20000 \text{ MPa}$$

$$E_3 = 20000 \text{ MPa}$$

$$G_{12} = 12000 \text{ MPa}$$

$$G_{23} = 12000 \text{ MPa}$$

$$G_{31} = 800 \text{ MPa}$$

$$\nu_{12} = 0,095$$

$$\nu_{23} = 0,095$$

$$\nu_{31} = 0,138$$

L'honeycomb lo prendiamo dall'azienda *Plascore*, specialista nel settore e lo trattiamo anch'esso come materiale ortotropo bidimensionale con le seguenti caratteristiche globali:

dimensione alveolo = 6.35 mm

spessore $h_{\text{core}} = 6.35 \text{ mm}$

spessore foglio d'alluminio = 0,102 mm

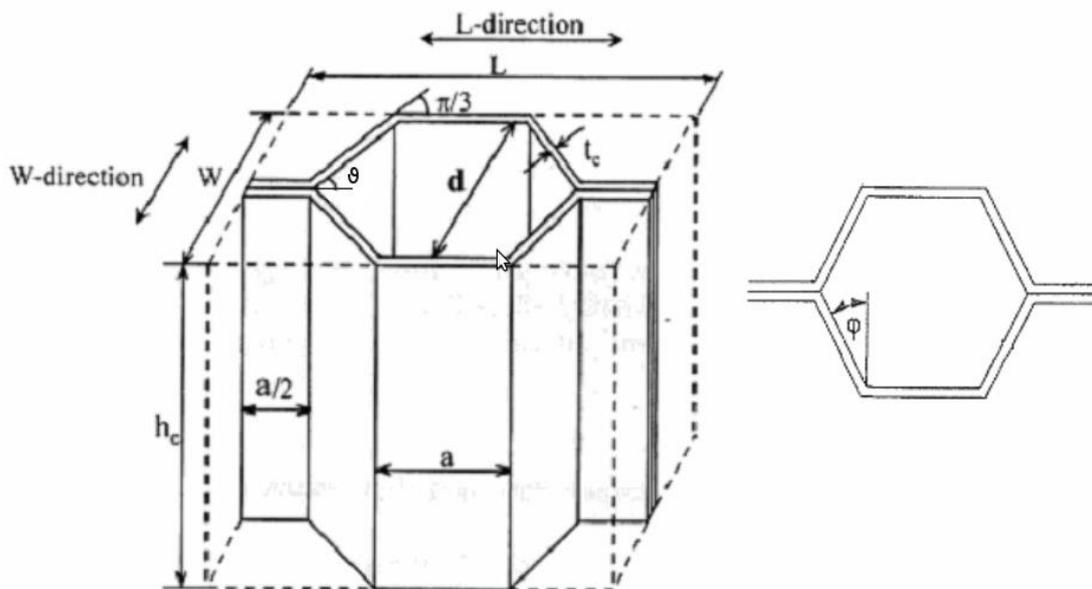


Figura 24- dimensioni caratteristiche honeycomb

$$\rho = 0,130 \text{ kg/dm}^3$$

$E_{11} = 100 \text{ MPa}$
 $E_{22} = 80 \text{ MPa}$
 $E_{33} = 2345 \text{ MPa}$
 $G_{13} = 897 \text{ MPa}$
 $G_{23} = 359 \text{ MPa}$
 $G_{12} = 10 \text{ MPa}$
 $\nu_{12} = 0,7518$
 $\nu_{31} = 0,003005$
 $\nu_{23} = 0,7518$

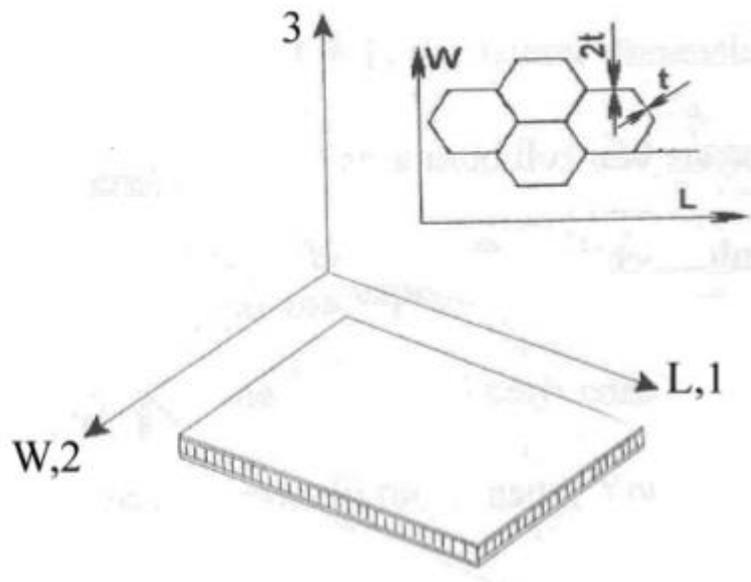


Figura 25- assi di ortotropia del sandwich

Per i pannelli e la cover glass i dati non cambiano.

GEOMETRIE SANDWICH

Riportiamo i disegni con le geometrie di questa configurazione sempre in metri. Si noti che l'honeycomb nell'analisi verrà visualizzato come materiale omogeneo in quanto per il software non è necessario disegnarlo, ma basta inserirvi le sue proprietà meccaniche.

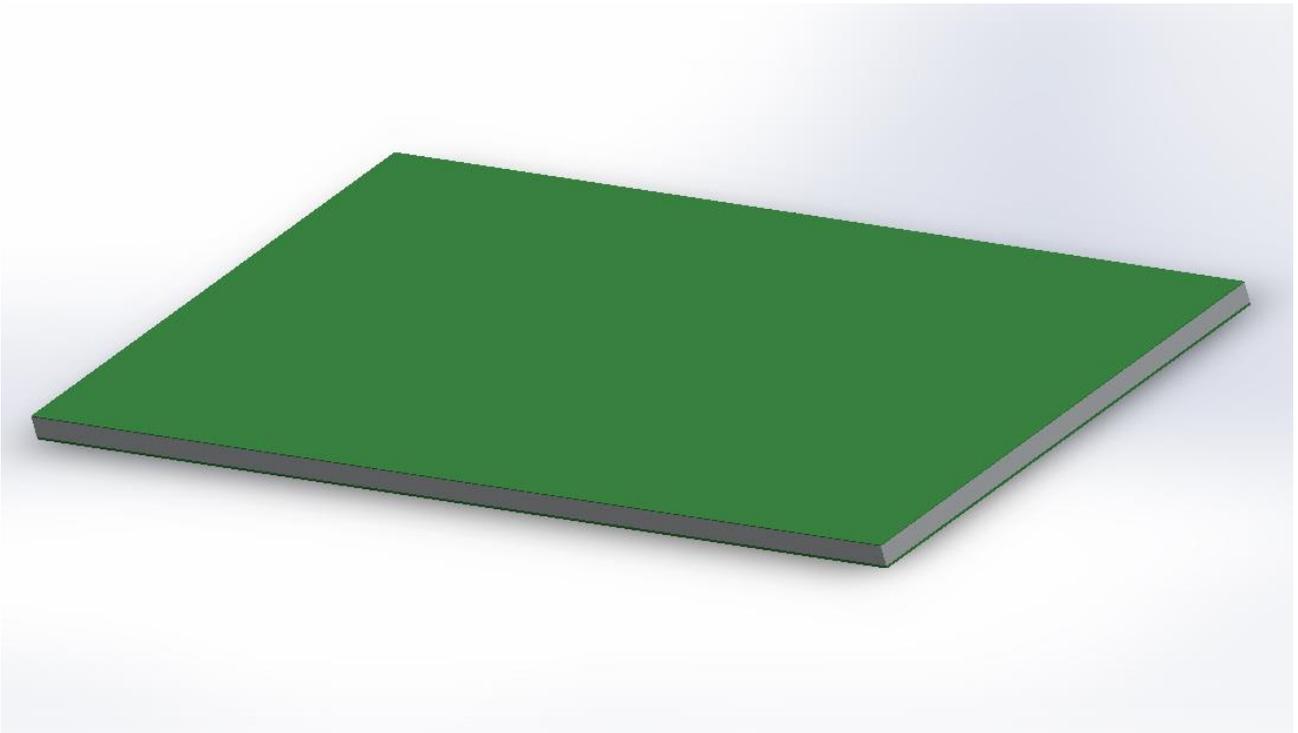


Figura 26- assonometria configurazione sandwich

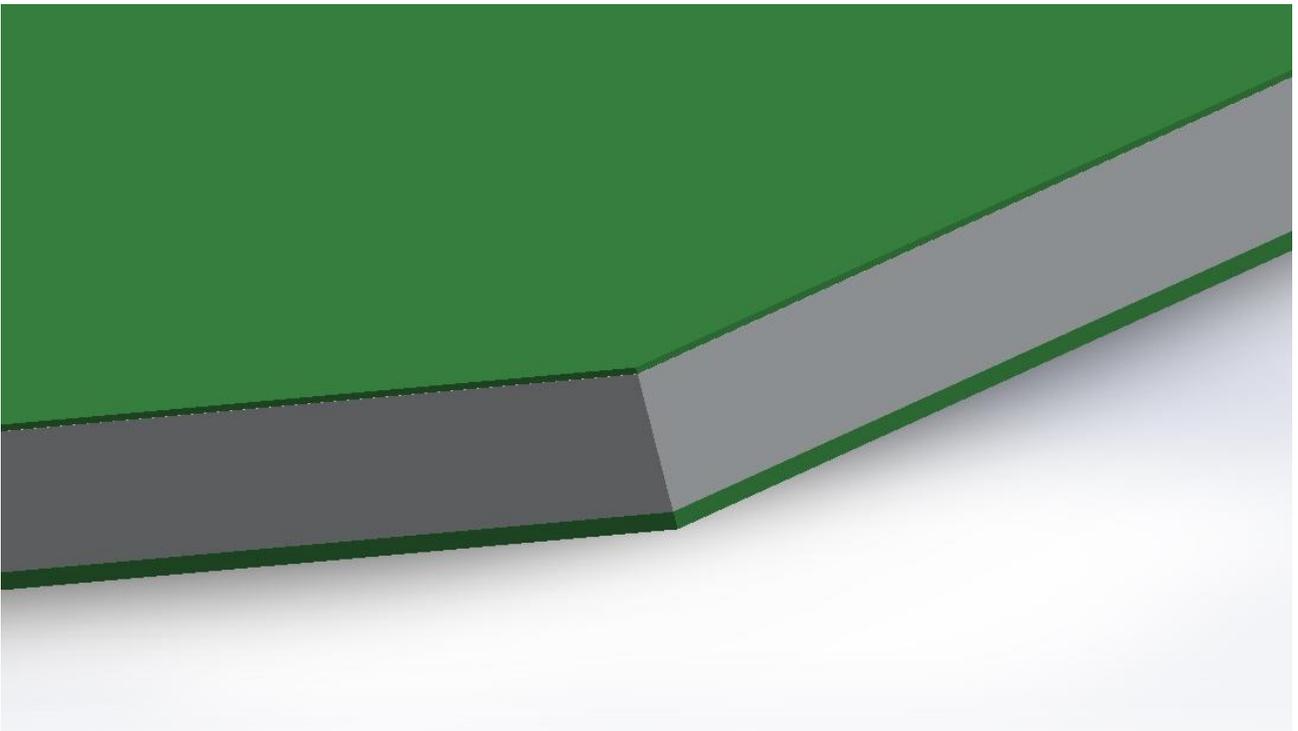


Figura 27 - dettaglio assonometrico stratificazione sandwich

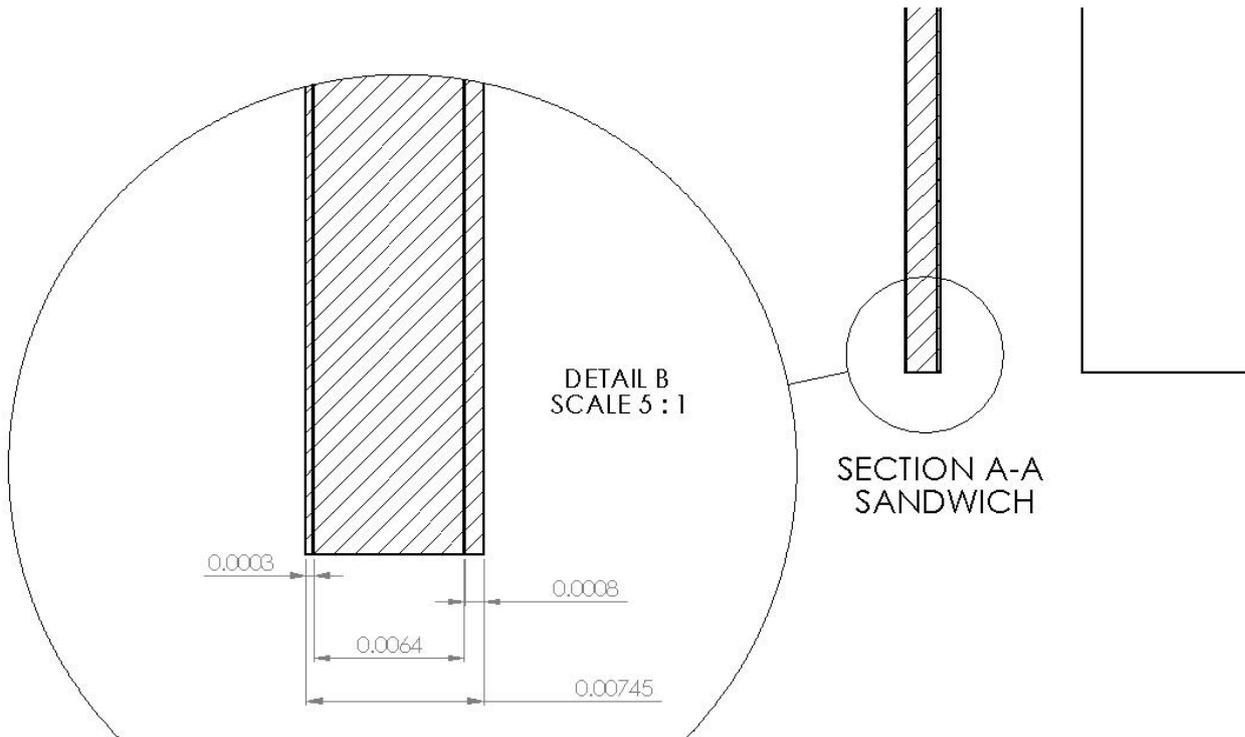


Figura 28- quotatura piastra sandwich

DATI GENERALI SANDWICH

$a=324$ mm

$b=159$ mm

h_{tot} senza pannelli = 7,45 mm

h_{tot} con pannelli = 7,70 mm

$S= (330 \times 165)-(80 \times \pi \times 1,5^2)= 53884,51332$ mm²

$\rho_{superficiale} = \sum (\rho \times h)_k = 0,000002573$ kg/mm² (senza pannelli)

M_{senza pannelli = 0,138644853 Kg

$M_{add} = 0,057036757$ Kg

M_{tot} sandwich = 0,19568161 Kg

Vediamo ora quali sono le teorie di analisi modale e termica per piastre multistrato.

3 ANALISI MODALE

L'analisi modale è lo studio del comportamento dinamico di un sistema quando viene sottoposto a vibrazione.

Applicata all'ingegneria, essa permette la determinazione della risposta di una struttura (di cui si conoscono proprietà e vincoli) in dinamica autonoma, oppure eccitata da sollecitazioni forzanti imposte dall'esterno.

Nel nostro caso l'analisi è funzionale alla ricerca delle frequenze naturali di vibrazione della tile in direzione normale al suo piano, ed è quindi un problema di dinamica in cui le forzanti esterne sono nulle.

La determinazione di tali frequenze è utile alla scelta del lanciatore, in quanto le vibrazioni tipiche che questo andrà ad indurre sul satellite dovranno essere diverse da quelle proprie delle tiles e questo affinché non si sviluppino fenomeni di risonanza.

In caso alcune frequenze si sovrappongano e non si possa scegliere un lanciatore diverso, tale determinazione è allora fondamentale per la modifica delle proprietà dinamiche del satellite (per i progetti accademici i lanci sono di solito offerti gratuitamente, è per cui impensabile poter scegliere un lanciatore diverso in caso di sovrapposizione delle frequenze in gioco).

La conoscenza di tali vibrazioni naturali e la peculiarità che il lanciatore imponga al nostro satellite un range di vibrazioni forzanti diverse da quelle proprie della sua struttura, garantiscono che la struttura del nostro satellite non vada incontro a fenomeni di risonanza.

Tali fenomeni possono distruggere la struttura del nostro satellite in un lasso di tempo molto breve.

La determinazione delle frequenze naturali di una struttura complessa può essere condotta secondo 3 metodi:

- **ANALITICO**: ipotizzando conosciute le proprietà, i vincoli e le geometrie dei materiali in esame, il metodo analitico prevede, in generale, la risoluzione di un problema agli autovalori in cui tali autovalori sono funzioni delle frequenze naturali della struttura. Il problema agli autovalori è impostato partendo dall'equazione differenziale omogenea o dal sistema di equazioni differenziali alle derivate parziali che regolano il comportamento elastico del componente nella direzione che stiamo esaminando, cercando una soluzione generale che risolva tale equazione differenziale, e introducendo i vincoli per estrapolarne la soluzione particolare che riguarda il nostro caso. Generalmente si tratta di risolvere la seguente equazione o il seguente sistema di equazioni del moto [1]:

$$[m]\{\ddot{x}\} + [k]\{x\} = 0$$

In cui la forzante esterna è nulla e dove $[K]$ rappresenta la matrice di rigidità e $[m]$ la matrice di massa della struttura da analizzare.

La ricerca di una soluzione armonica costituisce l'analisi modale reale del sistema; ipotizzando infatti una soluzione del tipo

$$\{x\} = \{A\} \cos(\omega t)$$

$$\{\dot{x}\} = -\omega \{A\} \sin(\omega t)$$

$$\{\ddot{x}\} = -\omega^2 \{A\} \cos(\omega t)$$

Si avrà che le frequenze naturali di vibrazione del sistema sono determinabili attraverso il calcolo degli autovalori del seguente problema associato

$$(-[m]\omega^2 + [k])\{A\} = 0$$

Tali autovalori rappresentano, come si vede, il quadrato delle pulsazioni naturali del sistema, mentre i relativi autovettori, i modi di deformazione della struttura trattata. Capiamo subito che la determinazione analitica delle frequenze può essere condotta in due modi: o si determinano le equazioni del moto della nostra struttura in cui compaiano anche i termini inerziali, si sostituisce la soluzione armonica per far scomparire le derivate temporali e ne si ricavano [k] ed [m] come sopra, oppure utilizziamo strade alternative per costruire direttamente le due matrici.

Sotto possiamo vedere un esempio di applicazione del primo approccio [2]; l'equazione rappresenta l'equilibrio delle forze esterne ed interne agenti sulla piastra in direzione trasversale, in cui si sono andate a sostituire le equazioni costitutive della piastra di Kirchhoff:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \frac{\bar{m}}{D} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0$$

Tale è l'equazione della superficie inflessa della piastra, ottenuta sostituendo nelle equazioni d'equilibrio alla traslazione lungo z le equazioni costitutive che legano gli spostamenti alle azioni di sollecitazione interne di taglio e momento.

Si ricorda che per questo esempio si è usato il modello agli spostamenti di kirchhoff. Si nota subito come l'equazione sopra sia risolvibile direttamente impostando una soluzione del tipo

$$w = w_0(x, y) \cos(\omega t + t_0)$$

Sostituendo tale soluzione generale all'interno dell'equazione differenziale, si possono determinare le pulsazioni naturali di vibrazione trasversale calcolando gli autovalori del sistema risultante, i quali saranno funzioni del quadrato di tali pulsazioni e del numero di semionde lungo X e Y.

Nel caso di piastre multistrato i modelli analitici sono molto complicati in quanto si è in presenza di numerosi gradi di libertà del problema e di caratteristiche dei materiali non omogenee nello spazio.

Per ottimizzare i conti, verranno proposti per ognuna delle tre configurazioni diversi approcci analitico/numerici, in parte approssimati e di uso consolidato nel mondo aerospaziale, atti a modellare il comportamento elastico trasversale della piastra e le sue proprietà inerziali e di rigidità.

La scelta del modello ottimale da utilizzare caso per caso viene formulata confrontando le ipotesi che questo induce col tipo di piastra che si sta considerando (laminato, sandwich, ecc..), in base a considerazioni sulle geometrie della piastra come ad esempio il rapporto tra il suo spessore e la sua larghezza, e in base alle differenze tra i materiali che compongono ogni multistrato.

Si vedrà che per piastre multistrato incastrate ai bordi, la ricerca di una soluzione analitica chiusa è pressoché impossibile grazie alla comparsa di termini misti che complicano non

poco la risoluzione dell'equazione differenziale proveniente dalle equazioni del moto. Si dovrà pertanto seguire una strada alternativa.

- **FEM-SIMULATIVO**: ossia con codice di calcolo agli elementi finiti. Generalmente con l'approccio fem, la bontà dei risultati dipende dalla bravura ed esperienza di chi costruisce il modello, che verrà analizzato risolvendo il solito sistema agli spostamenti discreti, dal livello di approssimazione che presentano le equazioni caratteristiche usate dal codice e dalla scelta delle funzioni di forma. Noi costruiremo il modello con Patran e lo analizzeremo dinamicamente con Nastran, sfruttando, per la scelta del tipo di elementi e del numero di nodi di calcolo, dei risultati sulla convergenza delle soluzioni del software. Tali risultati sono stati precedentemente trovati in un altro lavoro condotto sempre all'interno del progetto Aramis.
- **EMPIRICO**: ossia tramite rilevazione pratica in laboratorio. Si induce un ampio range di vibrazioni al componente in esame o ad un prototipo tramite attuatori meccanici e ne si valuta la risposta tramite trasduttori. Le frequenze che producono gli spostamenti maggiori nel componente sono quelle che vanno in risonanza con esso, e che cioè coincidono con le sue frequenze naturali. Chiaramente questo fra i tre descritti è il metodo più preciso, però richiede una strumentazione particolare e non è generalizzabile a modelli anche poco diversi fra loro.

Non disponendo degli strumenti necessari, per ogni configurazione la ricerca delle frequenze naturali della tile avverrà solamente con i primi due metodi.

3.1 TEORIE AGLI SPOSTAMENTI PER PIASTRE MULTISTRATO

L'analisi modale delle piastre multistrato può essere effettuata secondo diversi metodi analitici presenti in letteratura. Diversi sono, infatti, i metodi e gli approcci utilizzati per approssimare il problema e trarne risultati utili ed attendibili.

Generalmente il problema di determinazione delle frequenze naturali e dei corrispondenti modi di deformazione di una piastra monostrato è facilmente risolvibile sia come visto precedentemente, e cioè attraverso l'impostazione del suo associato problema agli autovalori, o tramite modelli semi-empirici che vedremo più avanti;

Il problema agli autovalori della piastra singola si ottiene, come visto, scrivendo le equazioni d'equilibrio delle azioni interne della piastra non soggetta a carichi esterni ed introducendo in queste le equazioni costitutive che ne legano le deformazioni alle azioni interne di sollecitazione; si ottiene un'equazione differenziale omogenea dalla quale si ricava l'associato problema agli autovalori, risolvibile direttamente al calcolatore.

Quando si è in presenza di un multistrato, la metodologia analitica da impostare per la determinazione delle frequenze naturali è la medesima, ma si complica per il fatto che l'eterogeneità fra gli strati prevede l'introduzione di ipotesi aggiuntive, di matrici caratteristiche più complicate da determinare e di nuove incognite rispetto al modello di piastra semplice monostrato. Tali ipotesi devono essere fatte in relazione alle caratteristiche geometriche e meccaniche peculiari della struttura che analizziamo (spessori relativi, spessore globale, livello di eterogeneità degli strati).

Bisogna praticamente determinare un modello di equazioni costitutive fra spostamenti,

deformazioni e tensioni, più generale, che tenga conto della presenza di più strati.

Successivamente il problema si può risolvere come per il monostrato, e cioè o determinando gli autovalori dall'omogenea associata che viene fuori dalle equazioni di equilibrio, oppure determinando gli autovalori del problema generale di cui si sono precedentemente calcolate le matrici di massa e di rigidezza globali.

Per strutture multistrato s'intendono piastre o gusci costituiti da più strati sovrapposti, i quali in genere hanno proprietà meccaniche diverse tra loro.

Le piastre sono elementi considerati bidimensionali in quanto una dimensione risulta trascurabile rispetto alle altre due, mentre i gusci, che noi non tratteremo, sono anch'essi elementi bidimensionali, ma presentano curvature lungo le due direzioni nel piano.

Per studiare tali elementi occorrono teorie che siano in grado di ridurre il problema da tridimensionale a bidimensionale.

In questa tesi verranno utilizzati modelli matematici derivanti da un approccio di tipo assiomatico; si suppone infatti l'assenza di delaminazioni come prima ipotesi fondamentale [1].

Ciò comporta che gli spostamenti lungo qualsiasi direzione debbano essere uguali all'interfaccia fra uno strato e quello adiacente, in modo da avere la continuità degli spostamenti lungo la direzione Z, ossia trasversalmente alla piastra.

Tali spostamenti dovranno però avere la discontinuità delle derivate prime lungo z, poiché le tensioni trasversali all'interfaccia σ_{zx} , σ_{zy} e σ_{zz} debbono essere uguali per ragioni di equilibrio fra i due strati adiacenti. Attenzione però che tali tensioni trasversali sono legate alle derivate prime degli spostamenti grazie a coefficienti che dipendono dalle proprietà meccaniche di ciascun strato; poiché tali proprietà sono diverse da strato a strato, l'unico modo per avere continuità delle tensioni trasversali è quello di avere derivate degli spostamenti diverse da strato a strato.

Tutto ciò risulta chiaro dall'osservazione della figura sotto.

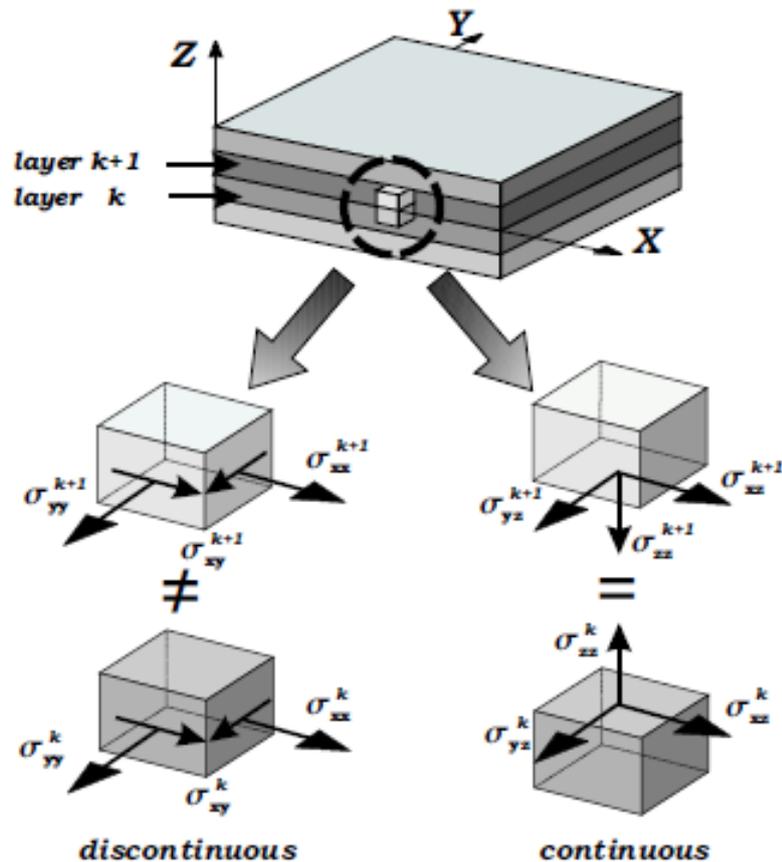


Figura 29- condizioni di continuità delle tensioni attraverso il multistrato

Per quanto riguarda invece le tensioni nel piano, ossia σ_{xx} , σ_{yy} e σ_{xz} , queste possono essere diverse fra uno strato e l'altro.

Quindi, riepilogando, le tensioni trasversali e gli spostamenti debbono essere continui lungo z , mentre non debbono esserlo le derivate prime. Tale condizione per la determinazione di una teoria di analisi dei multistrato, può essere esprimibile con il requisito matematico C_z^0 , ossia che per qualsiasi funzione le derivate di ordine 0, lungo z , dovranno essere continue.

I modelli matematici che vedremo per l'analisi dei multistrato, scaturiscono dal soddisfacimento di tale requisito, il quale, a sua volta, proviene dal fatto di aver imposto che non vi sia delaminazione fra strati adiacenti. Per questo le teorie che vedremo sono assiomatiche; poiché derivano dall'imposizione di determinate condizioni.

Per lo studio della piastra multistrato utilizzeremo il sistema di riferimento che vediamo nella figura sotto. Qui si è introdotta una superficie di riferimento Ω ed un sistema di assi cartesiani (x,y,z) in cui l'asse z risulta normale al piano individuato dai restanti due assi. E' chiaro come tutto ciò possa essere replicato per ogni singolo strato con l'introduzione di un opportuno pedice $-k$.

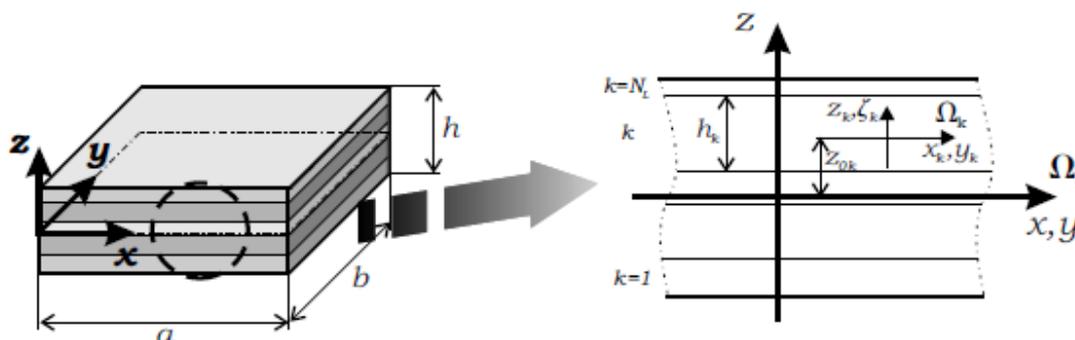


Figura 30- sistema di riferimento usato

Le teorie di analisi delle piastre possono essere raggruppate in due principali categorie distinte: i modelli agli spostamenti, in cui le variabili sono i soli spostamenti, e quelli misti, in cui vengono considerate incognite anche le tensioni.

Nel lavoro si considereranno solamente teorie agli spostamenti. Una volta scelto il modello più adatto per ogni tile, si determineranno le equazioni costitutive che daranno forma all'equazione differenziale omogenea che rappresenta la flessione della piastra multistrato, e dalla quale si estrapoleranno le frequenze naturali.

Mostriamo ora una panoramica molto generale sulle teorie agli spostamenti maggiormente usate e delle relative ipotesi che ciascuna comporta; successivamente scegliamo il metodo più adatto per il calcolo analitico delle frequenze naturali di ciascuna configurazione della tile.

In base all'approccio usato i metodi di analisi delle piastre multistrato si dividono essenzialmente in modelli 2D e modelli 3D. I primi, come visto, fanno delle assunzioni a priori sulla distribuzione di spostamenti e stress attraverso lo spessore della piastra introducendo dei vincoli matematici che alleggeriscono i calcoli, i secondi sono quasi tutti determinati attraverso approcci "elastici" del problema, sono molto precisi ma computazionalmente poco efficienti in quanto prevedono una grande quantità di incognite e l'uso di protocolli matematici per la risoluzione del problema agli autovalori associato. Va detto che per questa classe di problemi, molto spesso i risultati dei modelli 3D sono molto vicini, se non coincidenti, a quelli che si ottengono con una buona analisi FEM condotta con elementi solidi (essenzialmente tetraedri, esaedri e brick).

In base al livello di accuratezza che ci viene richiesto e tenendo conto che andremo anche a realizzare l'analisi tramite software FEM commerciale e che i risultati dei modelli 3D sono molto prossimi a quelli del software, decidiamo di effettuare la parte analitica dell'analisi modale attraverso l'uso di un modello 2D.

A titolo informativo va detto che le soluzioni analitiche 3D più usate e consolidate per i problemi di buckling e vibrazioni libere per laminati compositi multistrato o pannelli sandwich appoggiati, sono quelle presentate nel lavoro di Noor, Peters e Burton [15], mentre per multistrato incastrati, la letteratura offre molto poco.

I modelli 2D di analisi degli spostamenti e delle deformazioni delle piastre multistrato possono essere adottati secondo una visione ESL (equivalent single layer) del multistrato, oppure secondo una visione LW (layer wise).

Con l'ottica ESL (equivalent single layer), la piastra multistrato è trasformata in un'equivalente piastra monostrato che soddisfa le stesse equazioni costitutive (relazioni tra sforzi e deformazioni). È un modo di utilizzo dei modelli molto semplice, ma è valido ed accurato solo per piastre molto sottili, che non presentino una forte eterogeneità tra gli strati e che risultino molto rigide a taglio. In condizioni contrarie, la mancanza di accuratezza di tale modello è dovuta all'uso di un campo di spostamenti continuo lungo lo spessore che fa sì che non vi sia la continuità degli sforzi

trasversali.

Con l'ottica LW (layer wise), al contrario della ESL, ogni strato viene trattato singolarmente e la descrizione cinematica del problema è fornita strato per strato. Quando utilizzato, il metodo LW prevede una variazione almeno cubica delle 3 componenti di spostamento lungo lo spessore in modo da soddisfare automaticamente la continuità degli spostamenti e degli stress alle interfacce dei diversi strati.

E' un modo di procedere che fornisce una precisione dei risultati abbastanza elevata, ma è di uso molto poco pratico in quanto il numero di equazioni e calcoli cresce col numero di strati. Di notevole rilevanza è il metodo ottenuto da Rao e Desdai sfruttando tale ottica, il quale tratta la determinazione delle frequenze naturali di piastre sandwich appoggiate, ed il modello di Moreira e Dias per l'analisi di sandwich dal core relativamente stretto.

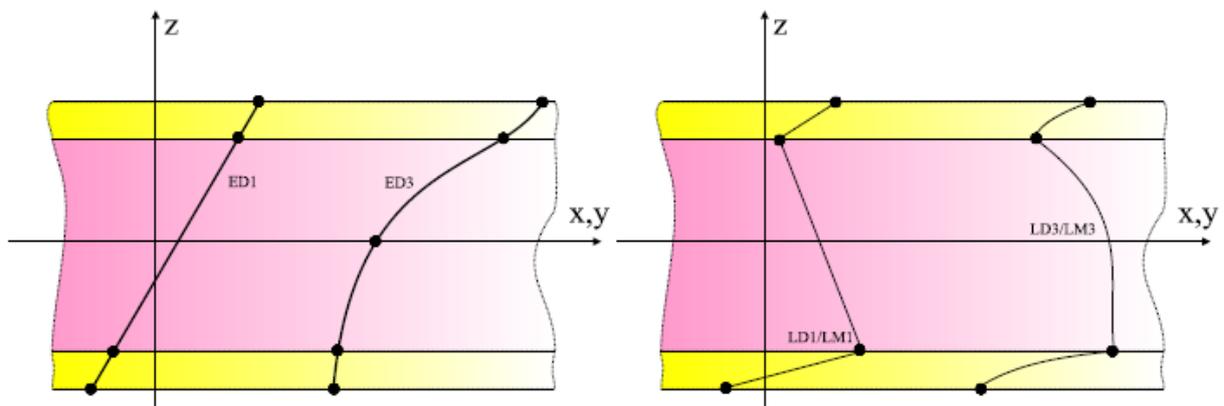


Figura 31- Esempio di andamento delle tensioni secondo ESL e LW

La differenza tra i due approcci si manifesta soprattutto nella determinazione di andamenti di tensioni e deformazioni sotto carico, mentre nel caso di determinazione delle frequenze naturali della piastra, l'approccio usato è di solito ESL, dove l'eterogeneità degli strati si manifesta essenzialmente nella scrittura di una matrice di rigidità globale e dove il modello agli spostamenti è usato prettamente per la scrittura dell'equazione differenziale o per la creazione di funzioni di forma che modellino degli andamenti incogniti.

Questo significa che dopo aver scelto la teoria più appropriata per ogni tile e aver impostato l'equazione differenziale, il lavoro maggiore sarà essenzialmente composto dalla scrittura di tali matrici e dalla ricerca degli autovalori di tale equazione.

Vediamo ora in breve quali sono i modelli più utilizzati per modellare il campo di spostamenti di una piastra multistrato. Questi sono:

- CLT [3]
- FSDT (o di Reissner-Mindlin) [3]
- HSDT/HOT [3]
- ZIG-ZAG (LZZ/CZZ/RZT)

Descriveremo nel dettaglio solamente le prime due in quanto gli ultimi due modelli sono complicati e computazionalmente pesanti, e questo siccome riescono a modellare anche multistrato in cui il rapporto tra le dimensioni in pianta e lo spessore sia più piccolo dei valori tipici di validità delle prime due teorie, e cioè anche per sandwich e multistrato relativamente molto spessi. Ciò non ci preoccupa siccome la tile più spessa che dovremo analizzare, cioè il sandwich, presenta un rapporto *lato corto in pianta/spessore* pari a circa 21 [14].

Entrambe le teorie sono state sviluppate inizialmente per i materiali isotropi e solo successivamente sono state estese verso una più generica analisi, ne si deduce che siano le più datate ed imprecise. Il primo è molto inaccurato in quanto basandosi sulle ipotesi di Kirchhoff trascura completamente la deformazione trasversale a taglio, mentre l'accuratezza del secondo dipende molto dalla scelta del fattore di taglio k_s (che comparirà in seguito), ossia dal parametro col quale si aggiusta e si modella la distribuzione degli sforzi di taglio e delle corrispondenti deformazioni lungo lo spessore [16].

Con lo scopo di eliminare il problema della scelta del fattore di taglio, risalgono a periodi immediatamente successivi anche teorie simili alla FSDT, che però modellano la distribuzione del taglio e degli scorrimenti con equazioni di ordine maggiore. Tramite l'uso di tali teorie di ordine maggiore, Kant e Swaminathan [17] proposero un'interessante formulazione analitica ed alcune soluzioni per la determinazione delle frequenze naturali di piastre sandwich semplicemente appoggiate; tale formulazione tiene conto degli effetti del taglio, della deformabilità trasversale e della variazione non lineare degli spostamenti appartenenti al piano medio di ciascun pannello attraverso lo spessore. Successivamente Swaminathan applicò la stessa teoria di alto ordine per la determinazione delle frequenze naturali delle piastre sandwich appoggiate con distribuzione antisimmetrica delle fibre delle facce [18].

3.1.1 CLT (classical lamination theory) [3]

La CLT è la teoria basata sulla formulazione agli spostamenti più semplice.

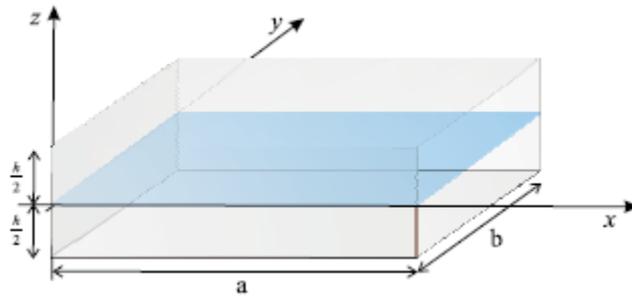
Essa si basa sulle ipotesi delle piastre sottili di Poisson-Kirchhoff:

1. I segmenti di spessore, inizialmente rettilinei, rimangono tali anche a deformazione avvenuta (ossia gli spostamenti lungo X e Y, denominati u e v , sono funzioni lineari in Z);
2. I segmenti di spessore mantengono invariata la loro lunghezza a deformazione avvenuta (ossia $\epsilon_{zz} = 0$);
- 2 bis. La tensione σ_{zz} può considerarsi nulla (chiariremo cosa comporta in seguito);
3. I segmenti di spessore, inizialmente ortogonali alla superficie di riferimento, conservano tale proprietà anche a deformazione avvenuta;

Tali ipotesi assiomatiche si traducono in relazioni; l'ipotesi di spessore costante si traduce infatti in $\epsilon_{zz} = 0$, mentre l'ipotesi che la sezione resti perpendicolare si traduce in scorrimento a taglio nullo e quindi $\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$. Quest'ultima ipotesi è molto significativa poiché permette di scrivere le rotazioni attorno ad X ed Y come derivate rispetto ad X ed Y dello spostamento lungo Z. L'ipotesi di spessore costante indica che lo spostamento lungo Z non cambia e resta sempre quello riferito alla superficie di riferimento Ω . Otteniamo allora il seguente modello agli spostamenti:

$$\begin{cases} u(x,y,z) = u^0(x,y) - zw'_{,x}(x,y) \\ v(x,y,z) = v^0(x,y) - zw'_{,y}(x,y) \\ w(x,y,z) = w^0(x,y) \end{cases}$$

Dal modello agli spostamenti otterremo le equazioni costitutive e successivamente l'equazione differenziale della deformata.



Sia per questo modello, sia per quello che segue, le ipotesi cinematiche sono impostate in modo che il campo di spostamenti su tutto il volume della piastra sia univocamente determinato dal campo di spostamenti della superficie di riferimento indicata con l'apice "0". Tale superficie, per comodità, è stata scelta coincidente con la superficie media della piastra (in azzurro sopra).

3.1.2 FSDT (Mindlin-Reissner o first shear deformation theory) [3]

La teoria di Reissner-Mindlin prevede due ipotesi sul campo di spostamenti ed una tensionale:

1. I segmenti di spessore, inizialmente rettilinei, rimangono tali anche a deformazione avvenuta (ossia gli spostamenti lungo X e Y, denominati u e v , sono funzioni lineari in Z);
2. I segmenti di spessore mantengono invariata la loro lunghezza a deformazione avvenuta (ossia $\epsilon_{zz} = 0$);

2 bis. La tensione σ_{zz} può considerarsi nulla;

dalle prime due ipotesi ricaviamo allo stesso modo di prima il campo di spostamenti:

$$\begin{cases} u(x,y,z) = u^0(x,y) + z\varphi_x(x,y) \\ v(x,y,z) = v^0(x,y) + z\varphi_y(x,y) \\ w(x,y,z) = w^0(x,y) \end{cases}$$

Si noti come le due teorie differiscano proprio dalla presenza o meno della terza ipotesi, e cioè quella sull'ortogonalità dei segmenti di spessore, dalla quale segue che per il modello di Kirchhoff si abbia $\epsilon_{xz} = \epsilon_{yz} = 0$, ossia che la piastra di Kirchhoff, come preannunciato, non lavora a taglio e le funzioni che per la piastra di Reissner - Mindlin abbiamo chiamato φ_x e φ_y , possono, come si può vedere sopra nel primo modello, essere rimpiazzate da una funzione di w^0 .

Abbiamo infatti dal campo di spostamenti della FSDT che $\epsilon_{xz} = \gamma_{xz} = w_{,x}^0 + \varphi_x$
 E siccome per Kirchhoff $\epsilon_{xz} = 0$ abbiamo (come visto sopra): $\varphi_x = -w_{,x}^0$
 Analogamente per $\epsilon_{yz} = \gamma_{yz} = 0$ si ottiene (come visto): $\varphi_y = -w_{,y}^0$.

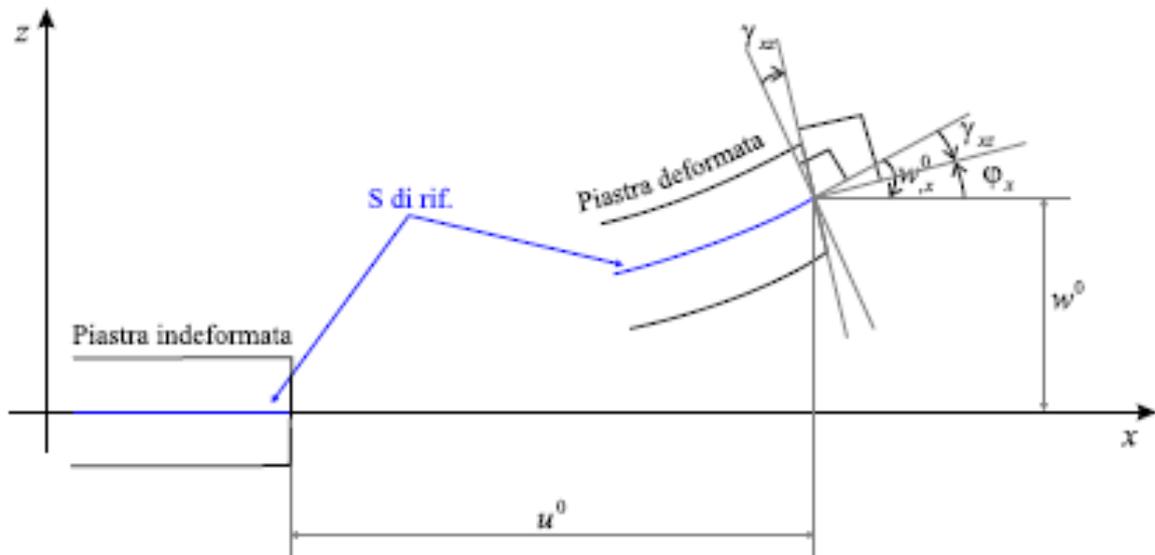


Figura 32- campo di spostamenti nel piano x-z secondo il modello FSDT

Il fatto di poter sostituire le funzioni φ con $w_{,x}$ o $w_{,y}$ potrebbe sembrare un vantaggio in quanto non si manifesta la necessità di definire ulteriori gradi di libertà accanto agli usuali u^0 , v^0 , w^0 , ma in realtà il fatto che la variabile w^0 compaia sotto segno di derivazione comporta delle complicazioni circa l'adozione delle funzioni delle funzioni di forma al momento della definizione di un ipotetico elemento finito piastra (abbiamo infatti che il nostro codice FEM Nastran^R, analizza gli elementi bidimensionali (shell, plate, etc.) secondo la teoria agli spostamenti di Reissner-Mindlin).

Il modello FSDT è preferibile anche perché permette di includere gli effetti del taglio nel campo di spostamenti, cosa che conserva valida la trattazione anche per spessori di piastra maggiori rispetto a quelli trattabili con la teoria di Kirchhoff.

Con la teoria di Kirchhoff, infatti, si possono analizzare piastre in cui il rapporto tra le dimensioni sul piano e lo spessore sia minimo 50, mentre con la teoria di R-M l'approssimazione può ritenersi valida anche attorno al valore di 20-25. Per valori di tale rapporto oltre 50, i due modelli coincidono e questo perché per piccoli spessori l'effetto del taglio è decisamente trascurabile. Infatti, come già visto, se poniamo $\gamma_x = 0$ dalla $\gamma_{xz} = w_{,x}^0 + \varphi_x$ segue che $\varphi_x = w_{,x}^0$ e di conseguenza i due modelli producono il medesimo campo di spostamenti.

Dalla CLT e FSDT scaturiscono poi teorie di ordine superiore che sono le HSDT (high order shear deformation theories), nelle quali si aumenta l'ordine di espansione dei termini in Z relativi alle sole componenti del piano (u e v), e questo perché permane l'ipotesi di $\epsilon_{zz} = 0$.

Se invece rimuoviamo anche tale ipotesi ed estendiamo lo sviluppo in Z anche per lo spostamento w (lungo Z), ecco allora le teorie di ordine superiore vere e proprie, chiamate in gergo HOT (high order theories). Date la complicazione computazionale che comporterebbero non le prenderemo però in considerazione.

3.1.3 Modelli ZIG-ZAG

Un altro modo per soddisfare la condizione di continuità degli sforzi e degli spostamenti trasversali può essere ottenuto assumendo un campo di spostamenti che, lungo lo spessore, sia discontinuo

all'interfaccia tra strati vicini che presentano proprietà meccaniche diverse. I modelli che si basano su tale assunzione sono i modelli ZIG-ZAG, dove la cinematica assunta è basata su una descrizione di tipo ESL a cui si sovrappone una distribuzione a tratti.

Tale modello ha un numero di variabili cinematiche indipendente dal numero di strati e per questo è computazionalmente meno pesante di un qualsiasi modello LW, ma presenta un'accuratezza molto simile.

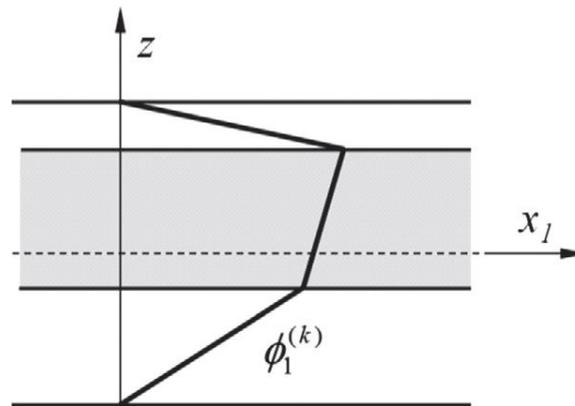


Figura 33- Esempio di andamento ZIG-ZAG lineare attraverso lo spessore

I modelli ZIG-ZAG sono attualmente ancora oggetto di studio ed hanno una notevole importanza nel campo delle analisi di compositi multistrato e sandwich, in quanto garantiscono buona accuratezza dei risultati e basse velocità di calcolo. Tali modelli si differenziano in base al grado del polinomio che approssima le distribuzioni di stress e spostamenti lungo lo spessore.

I modelli Tessler - Di Sciuva [4]

Primo fra tutti è il modello LZZ (linear zig-zag) formulato dal professor Di Sciuva [19]; tale teoria modella il campo di spostamenti appartenenti al piano con una distribuzione lineare a tratti lungo lo spessore, soddisfa a priori la continuità di spostamenti e sforzi alle interfacce tra strati diversi e trascura la deformabilità trasversale a taglio.

Più tardi lo stesso Di Sciuva ha formulato il modello PLATE (o cubic) ZIG-ZAG (CZZ), basato su una variazione cubica a tratti lungo lo spessore degli spostamenti appartenenti al piano, ottenuta dalla sovrapposizione della distribuzione lineare data dalla LZZ e di una variazione cubica spalmata. Anche tale modello soddisfa a priori la continuità geometrica e del taglio.

Recentemente Tessler ha proposto un modello ZIG-ZAG per travi, gusci e piastre multistrato conosciuto come RTZ (refined zig-zag theory) [19]. Tale teoria migliora le ipotesi cinematiche della FSDT, aggiungendo una funzione zig-zag lineare a tratti che rappresenta gli spostamenti del piano lungo le interfacce della piastra e che considera gli spostamenti trasversali costanti lungo lo spessore.

La funzione zig-zag in questione è capace di riprodurre il modello di spostamenti nel piano e tiene conto della deformazione a taglio in ogni strato in modo consistente; proprio grazie a ciò non richiede l'introduzione di un fattore di correzione del taglio. Il campo cinematico risultante avrà un numero fisso di variabili cinematiche (incognite) indipendente dal numero di strati e che non impone la continuità degli stress di taglio trasversali tra strati adiacenti.

Nonostante ciò si riescono ad ottenere stime accurate di tutte le risposte, inclusi gli sforzi di taglio trasversali per i quali il metodo fornisce dei valori medi accurati al livello medio di ogni strato, e miglioramenti delle distribuzioni attraverso lo spessore vicino ai bordi vincolati rispetto alle teorie LZZ e CZZ.

In più Tessler ha mostrato come piastre omogenee possano, con tale teoria, essere modellate

come laminati con livelli infinitesimamente piccoli di eterogeneità tra strati adiacenti; questo approccio, definito “del limite di eterogeneità”, produce una stima molto accurata delle risposte del sistema, incluse quelle degli sforzi trasversali senza l’uso di fattori correttivi del taglio. I risultati presentati per diversi problemi, mostrano e sottolineano come la RTZ presenti un’ottima capacità di stima e sia applicabile ad un ampio range di problemi, anche a laminati con strati molto eterogenei.

Riassumendo, i risultati numerici presenti in letteratura [14] dimostrano come la RTZ assicuri risultati molto accurati sia in termini di risposta globale (frequenze naturali, deflessione, carichi critici), sia in termini di distribuzione di stress e spostamenti lungo lo spessore. In più l’accuratezza del metodo è indipendente dall’uso di un fattore di correzione del taglio ed è contenuta all’interno di un ampio range di variazione di parametri geometrici e meccanici del laminato.

Anche i modelli di ordine più elevato (CZZ) forniscono stime corrette sulla risposta del laminato, ma non migliorano significativamente l’accuratezza del risultato rispetto alle teorie zig-zag lineari (RTZ e LZZ).

E’ quindi inutile adottare dei modelli di grande ordine per migliorare la stima sulla risposta globale del multistrato.

La FSDT risulta accurata in molti casi se utilizzata col giusto fattore di correzione del taglio, tuttavia, per sandwich spessi e con strati molto eterogenei, quest’accuratezza svanisce e la distribuzione di stress e spostamenti lungo lo spessore è molto diversa da quella che si avrebbe con un modello più preciso di riferimento (3D, FEM, ecc..).

Funzione ZIG-ZAG di Muramaky [5]

Anche la funzione di Murakami ci permette di introdurre l'effetto zig-zag rimanendo comunque nell'ambito della Equivalent Single Layer, senza bisogno di passare alle teorie di tipo Layer Wise. Tale funzione rappresenta un metodo di modellazione del campo di spostamenti di una qualsiasi teoria in un campo di spostamenti simile, in cui le funzioni sono lineari a tratti.

E’ un metodo di analisi molto elegante ma di scarso utilizzo nei problemi dinamici come il nostro. Vediamo il campo di spostamenti che ne deriva considerando ad esempio La FSDT; si ha:

$$\begin{aligned}
 u_x(x,y,z) &= u_{x0}(x,y) + z u_{x1}(x,y) + (-1)^k \zeta_k u_{xZ} \\
 u_y(x,y,z) &= u_{y0}(x,y) + z u_{y1}(x,y) + (-1)^k \zeta_k u_{yZ} \\
 u_z(x,y,z) &= u_{z0}(x,y)
 \end{aligned}$$

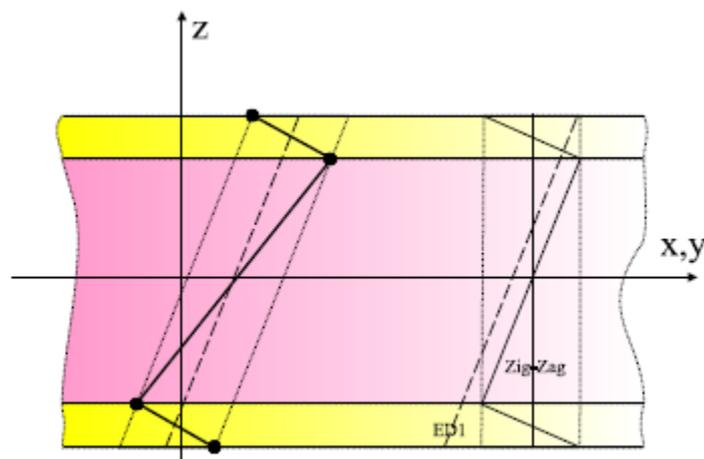


Figura 34- Andamento di Muramaki

Il pedice Z indica che μ è stata introdotta la funzione di Murakami, il cui significato risulta chiaro dall'osservazione della figura sopra. Si ha una coordinata adimensionale che vale

$$\zeta_k = 2z_k/h_k$$

ed inoltre l'esponente k cambia di segno in ogni strato.

Il tutto è quindi un artificio per ottenere la discontinuità della derivata prima dello spostamento, cosa che le teorie ESL non permettono di fare, ma che invece risulta importante se si vuole avere continuità degli sforzi trasversali lungo i vari strati.

Detto ciò, in base alle caratteristiche geometriche e meccaniche di ogni configurazione proposta per la tile di Aramis, passiamo alla scelta del modello più opportuno per ciascuna di esse. Si ricorda che la tile è incastrata (quindi non appoggiata) ai bordi secondo una fila di viti di giunzione poste internamente al pannello; ciò comporterà che le dimensioni di analisi delle frequenze libere andrà effettuata sulla porzione di pannello interna alle viti di giunzione. In più, per ogni configurazione, i pannelli che compongono il multistrato verranno considerati perfettamente incollati tra loro e l'eventuale effetto delle colle non verrà preso in considerazione.

3.2 ORTOTROPIA DEGLI STRATI

Per ciascuna delle configurazioni in esame, la tile è costituita da almeno due strati di materiale ortotropo. L'unico strato isotropo è infatti quello di alluminio da 1,6 mm della configurazione 3L. L'ortotropia [6] è una caratteristica tipica dei materiali compositi, ossia quelli solitamente costituiti da due materiali molto diversi che tenuti insieme collaborano per donare al materiale finale delle proprietà meccaniche diverse da quelle di ciascun materiale. Di solito sono composti da una matrice di resina epossidica, ceramica o metallica, in cui vengono annegate delle fibre di rinforzo essenzialmente in vetro, carbonio, kevlar o altri. Compito della matrice, generalmente epossidica, è quello di trasmettere gli sforzi tra fibre, tenerle separate e proteggerle da agenti esterni. L'ortotropia può però presentarsi anche per materiali solitamente isotropi. Una particolare forma dell'oggetto costruito con materiale isotropo può far sì che questo presenti proprietà meccaniche diverse nelle tre direzioni fondamentali; è il caso tipico delle strutture di tipo Honeycomb, le quali hanno proprietà meccaniche enormemente differenti da quelle del metallo isotropo con cui vengono realizzate.

Per spiegare il fenomeno immaginiamo che le fibre della lamina che compone uno degli strati, siano tutte parallele ed orientate secondo una direzione preferenziale che indichiamo con L. Sia T la direzione sempre nel piano della lamina, ma ortogonale a L.

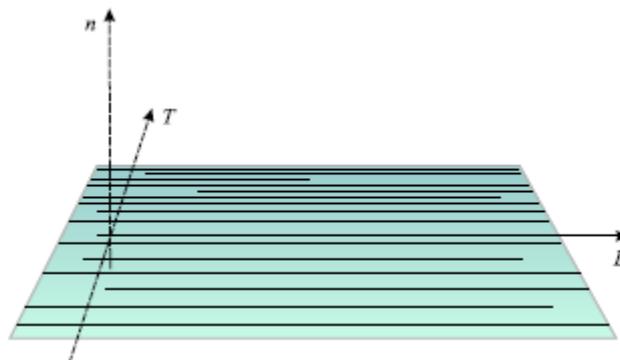


Figura 35- Direzioni principali di ortotropia

Di conseguenza, la lamina sarà ortotropa, con per assi principali di ortotropia L, T e, ovviamente, n, cioè la direzione normale al piano su cui giace la lamina stessa. Ciò significa che essa presenterà un differente comportamento meccanico a seconda che si consideri la direzione longitudinale L o quelle trasversali T o n.

3.3 LEGGE DI HOOKE PER MULTISTRATO A LAMINE ORTOTROPE

La legge di Hooke generalizzata può essere scritta nella forma [3]:

$$\{\sigma\} = [C]\{\varepsilon\}$$

con:

$$\{\sigma\}^T = \{\sigma_{xx} \quad \sigma_{yy} \quad \sigma_{zz} \quad \sigma_{xz} \quad \sigma_{yz} \quad \sigma_{xy}\}$$

vettore tensione e

$$\{\varepsilon\}^T = \{\varepsilon_{xx} \quad \varepsilon_{yy} \quad \varepsilon_{zz} \quad \varepsilon_{xz} \quad \varepsilon_{yz} \quad \varepsilon_{xy}\}$$

vettore deformazione.

[C] è la matrice di rigidezza del materiale o matrice costitutiva; essa, essendo simmetrica, nel caso più generico in cui il materiale non presenta alcun piano di simmetria, ha 21 elementi indipendenti. Per esteso, la legge di Hooke generalizzata nel caso di totale asimmetria comportamentale, può scriversi come:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{14} & C_{24} & C_{34} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{15} & C_{25} & C_{35} & C_{45} & C_{55} & C_{56} \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & C_{46} & C_{56} & C_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xy} \end{pmatrix}$$

Se esiste un piano di simmetria (comportamento monoclinico) diventa:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & C_{36} \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & C_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{45} & C_{55} & 0 \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xy} \end{pmatrix}$$

Se invece vi sono due piani di simmetria mutuamente ortogonali, la simmetria esiste anche rispetto ad un terzo piano ortogonale ai primi due (comportamento ortotropo). Segue un'ulteriore semplificazione della matrice di rigidezza:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xy} \end{pmatrix}$$

Da notare che in quest'ultimo caso non ci sono interazioni di sorta fra le tensioni normali σ_{xx} , σ_{yy} , σ_{zz} e gli scorrimenti ε_{xz} , ε_{yz} , ε_{xy} . Stessa cosa dicasi per le tensioni tangenziali σ_{xz} , σ_{yz} , σ_{xy} e la deformazioni lineari ε_{xx} , ε_{yy} , ε_{zz} .

Per relazioni di simmetria avremo anche che:

$$E_x \nu_{yx} = E_y \nu_{xy}$$

$$E_y \nu_{zy} = E_z \nu_{yz}$$

$$E_z \nu_{xz} = E_x \nu_{zx}$$

E' ciò indica che nel caso di comportamento ortotropo, quindi, le 12 costanti ingegneristiche presenti nella matrice elastica, si riducono a 9 costanti indipendenti. Ciò si vede bene nella scrittura della formula inversa:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{E_x} & -\frac{\nu_{yx}}{E_y} & -\frac{\nu_{zx}}{E_z} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{xy}}{E_x} & \frac{1}{E_y} & -\frac{\nu_{zy}}{E_z} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{yz}}{E_x} & -\frac{\nu_{yz}}{E_y} & \frac{1}{E_z} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{xy}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{yz}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{zx}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{pmatrix}$$

La maggior parte dei materiali di impiego ingegneristico sono omogenei ed hanno comportamento isotropo (due sole costanti ingegneristiche indipendenti); un corpo si intende omogeneo quando le sue proprietà fisiche e meccaniche sono indipendenti dal punto in cui vengono considerate; isotropo se le stesse proprietà non dipendono dalla direzione.

I materiali compositi sono spesso sia eterogenei che anisotropi, a volte ortotropi.

Un materiale ha comportamento ortotropo se, scelto un punto al suo interno, le caratteristiche fisiche e meccaniche sono diverse lungo tre direzioni preferenziali mutuamente ortogonali.

L'intrinseca anisotropia porta ad un comportamento meccanico diverso da quello dei tradizionali materiali a comportamento isotropo.

Per i materiali ortotropi, quando il carico è applicato lungo una direzione principale, il comportamento è sostanzialmente simile a quelli isotropi, differenziandosi soltanto per l'entità delle deformazioni nelle tre diverse direzioni. In caso di ortotropia, uno sforzo di taglio causa scorrimento, ma il modulo tangenziale, contrariamente a quanto accade nel caso isotropo, non è più funzione dei moduli di Young o di Poisson.

Nei materiali anisotropi, l'applicazione di uno sforzo normale provoca non solo estensione/contrazione nella direzione perpendicolare, ma anche scorrimento (e viceversa uno sforzo di taglio provoca anche contrazione/estensione).

Questo accoppiamento tra i due tipi di sollecitazione (e quindi deformazione) è caratteristico anche dei materiali a comportamento ortotropo, soggetti a sforzo normale in una direzione diversa dalle direzioni principali di ortotropia.

Quanto sopra detto è qualitativamente schematizzato nella figura sotto.

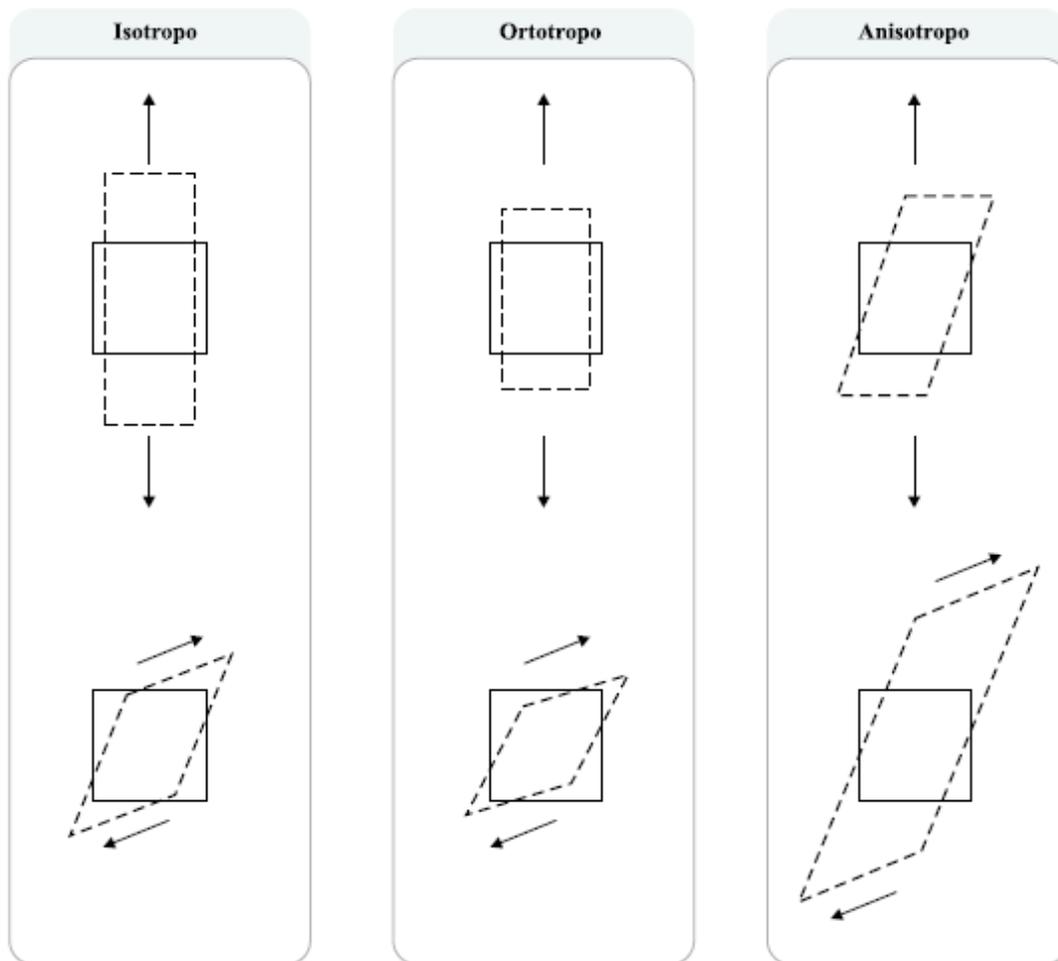


Figura 36- Esempio di comportamento isotropo, ortotropo ed anisotropo a trazione

3.4 COSTANTI INGEGNERISTICHE PER MATERIALI ORTOTROPI

Le costanti ingegneristiche sono sostanzialmente i moduli di Young trasversali G_{ij} , longitudinali E_i , e i moduli di Poisson (ν_{ij}) dell'elemento che si vuole esaminare.

La loro importanza è dovuta alla relativa facilità con cui possono essere determinati ed al loro notevole significato fisico.

I coefficienti di rigidezza (elementi della matrice C_{ij}) dipendono dalla combinazione di tali costanti secondo le seguenti relazioni [3]:

$$\begin{aligned}
C_{11} &= \frac{1 - \nu_{23}\nu_{32}}{E_1 E_2 \Delta} \\
C_{12} &= \frac{\nu_{21} + \nu_{31}\nu_{23}}{E_2 E_3 \Delta} \\
C_{13} &= \frac{\nu_{13} + \nu_{12}\nu_{23}}{E_1 E_2 \Delta} \\
C_{22} &= \frac{1 - \nu_{13}\nu_{31}}{E_1 E_3 \Delta} \\
C_{23} &= \frac{\nu_{32} + \nu_{12}\nu_{31}}{E_1 E_3 \Delta} \\
C_{33} &= \frac{1 - \nu_{12}\nu_{21}}{E_1 E_2 \Delta} \\
C_{44} &= G_{31} \\
C_{55} &= G_{23} \\
C_{66} &= G_{12} \\
\Delta &= \frac{1 - \nu_{12}\nu_{21} - \nu_{23}\nu_{32} - \nu_{31}\nu_{13} - 2\nu_{21}\nu_{32}\nu_{13}}{E_1 E_2 E_3}
\end{aligned}$$

Nelle quali 1,2,3 rappresentano le direzioni principali X,Y,Z dove l'asse X è parallelo alla direzione longitudinale delle fibre, la quale, per le schede in FR4, è parallela al lato lungo della tile. Se, come nel nostro caso, le direzioni 2 e 3 hanno le stesse proprietà possiamo scrivere:

$$\begin{aligned}
E_2 &= E_3 \\
\nu_{12} &= \nu_{23} \\
\nu_{12} &= \nu_{13} \\
\nu_{21} &= \nu_{31} \\
G_{13} &= G_{12} = G_{31}
\end{aligned}$$

Ed essendo inoltre valida la relazione

$$\frac{\nu_{ij}}{E_i} = \frac{\nu_{ji}}{E_j}$$

segue che:

$$\nu_{23} = \nu_{32}$$

e allora, in conclusione:

$$\nu_{12} = \nu_{23} = \nu_{32} = \nu_{13}$$

$$\nu_{21} = \nu_{31}$$

E le equazioni per il calcolo dei coefficienti della matrice di rigidità diventano:

$$C_{11} = \frac{1 - \nu_{12}^2}{E_2^2 \Delta}$$

$$C_{12} = \frac{\nu_{12}(1 + \nu_{12})}{E_1 E_2 \Delta}$$

$$C_{13} = \frac{\nu_{12}(1 + \nu_{12})}{E_1 E_2 \Delta}$$

$$C_{22} = \frac{1 - \nu_{13}\nu_{31}}{E_1 E_2 \Delta}$$

$$C_{23} = \frac{\nu_{12} + \nu_{12}\nu_{31}}{E_1 E_2 \Delta}$$

$$C_{33} = \frac{1 - \nu_{12}\nu_{21}}{E_1 E_2 \Delta}$$

$$C_{44} = G_{13}$$

$$C_{55} = G_{23}$$

$$C_{66} = G_{12}$$

$$\Delta = \frac{1 - \nu_{12}^2 - 2\nu_{12}\frac{E_2}{E_1}(1 + \nu_{12})}{E_1 E_2^2}$$

Per materiali isotropi, come ad esempio lo strato di alluminio presente nella configurazione 3L, le costanti elastiche indipendenti si riducono a 2. E' infatti noto come per un materiale isotropo, e cioè per un materiale che presenti proprietà meccaniche identiche secondo qualsiasi direzione di analisi, si ha:

$$C_{11} = C_{22} = C_{33} = E$$

$$C_{12} = C_{23} = C_{13} = -E/\nu$$

$$C_{44} = C_{55} = C_{66} = G \quad \text{dove}$$

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

3.4.1 MATRICE DELLE RIGIDENZE RIDOTTE [6]

Diamo uno sguardo alla legge di Hooke per il caso ortotropo

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xy} \end{pmatrix}$$

Avremo che impostando un modello agli spostamenti di tipo CLT o FSDT, come visto, si trascurerà l'effetto della ε_{zz} e ciò significa che le tensioni membranali (σ_{xx} ; σ_{yy} ; σ_{xy}) saranno disaccoppiate da quelle al di fuori del piano (σ_{zz} ; σ_{xz} ; σ_{yz}).

Ma, il fatto che per l'ipotesi tensionale si ponga $\sigma_{zz} = 0$, non implica che $\varepsilon_{zz} = 0$, e ciò è dovuto all'**effetto Poisson**, quindi alla presenza di C_{13} e C_{23} nella terza riga della matrice costitutiva sopra. Per questo motivo, usualmente si ricorre alla generazione della *matrice delle rigidzze ridotte*: si tratta della matrice dei coefficienti elastici che vediamo sopra, privata di terza riga e colonna, e con i termini $[C_{ij}]$ opportunamente modificati in $[C'_{ij}]$ (che in seguito chiameremo $[Q_{ij}]$).

Ciò avviene tenendo conto della ε_{zz} che deriva dall'equazione estratta dalla terza riga della matrice $[C_{ij}]$ impostando $\sigma_{zz} = 0$. Si ha:

$$0 = C_{13}\varepsilon_{xx} + C_{23}\varepsilon_{yy} + C_{33}\varepsilon_{zz}$$

Risparmiando al lettore i singoli passaggi algebrici, ci limitiamo a dire che concettualmente i termini C'_{11} ; C'_{12} ; C'_{22} si ottengono scaricando sui termini C_{11} ; C_{12} ; C_{22} il contributo che la ε_{zz} , ottenuta dalla formula sopra, apporta alla σ_{xx} e alla σ_{yy} .

Le restanti celle non subiscono mutazioni in quanto, come si vede dalla legge di Hooke per materiali ortotropi, risultano disaccoppiate dalla ε_{zz} ; quindi:

$$C'_{44} = C_{44}, C'_{55} = C_{55} \text{ e } C'_{66} = C_{66}.$$

Ricapitolando, abbiamo messo in evidenza che, in virtù della legge costitutiva, nasce una $\varepsilon_{zz} \neq 0$, anche se nel campo di spostamenti si ha che $w = w_0$, il che comporta una $\varepsilon_{zz} = 0$.

Questa è un'incongruenza del modello che, tuttavia, non si traduce in risultati inattendibili.

E' ora intuibile come, considerando per w la relazione $w = w_0$, nasca una $\varepsilon_{zz} \neq 0$ anche dal campo di spostamenti (oltre che dal legame costitutivo, come appena visto).

Ciò darebbe luogo ad un accoppiamento tra sollecitazioni membranali e non, con massiccia complicazione delle equazioni del moto.

E' per questo motivo che si preferisce trascurare un eventuale termine $z^* \varphi_z$ nella descrizione dello spostamento lungo Z e si mantiene $w = w_0$.

Le formule dei coefficienti presenti nella matrice delle rigidzze ridotte sono molto semplici e sono

reperibili nel codice di calcolo adottato;
 generalmente tale matrice delle rigidezze ridotte, per la piastra multistrato, assume la seguente forma:

$$[Q^k]_{xy} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{16} & 0 & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & Q_{26} & 0 & 0 \\ Q_{16} & Q_{26} & Q_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{44} & Q_{45} \\ 0 & 0 & 0 & Q_{45} & Q_{55} \end{bmatrix}$$

Che si semplifica ulteriormente quando le direzioni di analisi X e Y coincidono con quelle di laminazione L e T:

$$[Q^k]_{LT} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{55} \end{bmatrix}$$

3.5 ANALISI MODALE CONFIGURAZIONE 8L

Cominciamo la determinazione delle frequenze naturali per la configurazione più semplice della tile. Tale configurazione prevede l'incollaggio di 8 pannelli di FR4 per uno spessore complessivo di 1,6 mm pre-assemblati dalla *Eurocircuits*, la quale, purtroppo per noi, non conduce questo tipo di analisi sui suoi prodotti .

3.5.1 DETERMINAZIONE ANALITICA

Per la determinazione analitica non si considererà l'influenza dei pannelli fotovoltaici e della cover glass, mentre nell'analisi FEM verranno presi in considerazione in un secondo momento per valutarne l'effetto sulle dinamiche della tile.

Procediamo secondo l'approccio ESL e sfruttiamo il metodo di Leissa [99](#) per la determinazione delle frequenze naturali di pannelli rettangolari singoli, incastrati su tutti e quattro i lati.

Innanzitutto cerchiamo di attribuire al multistrato delle proprietà globali per poterlo trattare come un pannello singolo. Tutto ciò sarà molto semplice in quanto gli 8 strati sono composti tutti dello stesso materiale e sono laminati tutti secondo lo stesso orientamento.

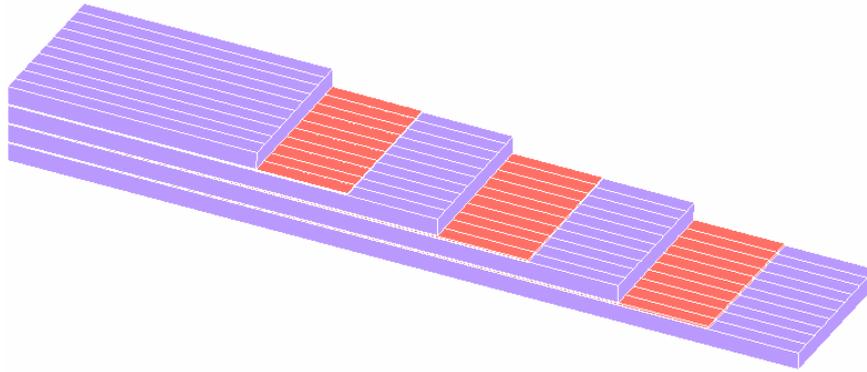


Figura 37- orientamento fibre configurazione 8L

Senza dover richiamare la teoria ESL possiamo assimilare il nostro multistrato ad un'unica piastra di FR4 spessa 1,6 mm avente le proprietà meccaniche riportate sopra. Vediamo come procedere.

3.5.2 METODO DI LEISSA PER PANNELLI RETTANGOLARMENTE ORTOTROPI INCASTRATI

Un primo modo per analizzare questa configurazione della tile è usando un metodo che non abbiamo riportato nella descrizione delle teorie di analisi delle piastre multistrato, e cioè attraverso l'uso di equazioni semi-empiriche formulate per lo studio dinamico delle piastre monostrato.

Nel suo lavoro [7] A. Leissa tratta in maniera approfondita il problema della determinazione delle frequenze naturali e dei rispettivi modi di deformazione di piastre monostrato di diverse forme geometriche e in ogni configurazione di vincolo possibile ai bordi.

Questo ci è molto utile in quanto la nostra piastra, essendo incastrata e ortotropa, definisce un tipo di problema poco considerato in letteratura.

E' infatti noto come per piastre appoggiate il problema sia stato sviscerato sotto tutti i punti di vista, mentre per quelle incastrate molto meno, anche a causa delle complicazioni che questo tipo di vincolo porta nella risoluzione del problema agli autovalori associato.

Il metodo di Leissa per la determinazione delle frequenze naturali di piastre che presentino ortotropia rettangolare comincia dalla scrittura dell'equazione differenziale della flessione della piastra:

$$D_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2D_{xy} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0$$

dove le costanti elastiche sono determinabili come:

$$\left. \begin{aligned} D_x &= \frac{E_x h^3}{12(1-\nu_x \nu_y)} \\ D_y &= \frac{E_y h^3}{12(1-\nu_x \nu_y)} \\ D_{xy} &= D_x \nu_y + 2D_k \\ D_k &= \frac{Gh^3}{12} \end{aligned} \right\}$$

Si assume la soluzione come funzione armonica semplice:

$$w = W \cos \omega t$$

Dove ω è la frequenza circolare e W è funzione spaziale delle sole coordinate x e y . Sostituendo la soluzione nell'equazione differenziale otteniamo la formulazione:

$$(\nabla^4 - k^4) W = 0$$

Dove k vale:

$$k^4 = \frac{\rho \omega^2}{D}$$

Formulazione che è conveniente fattorizzare nella forma:

$$(\nabla^2 + k^2)(\nabla^2 - k^2) W = 0$$

Da cui, per la teoria delle equazioni differenziali lineari, la completa soluzione del problema può essere ottenuta sovrapponendo le soluzioni delle equazioni:

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 W_1 + k^2 W_1 &= 0 \\ \nabla^2 W_2 - k^2 W_2 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Warburton presentò la prima collezione comprensibile di soluzioni per piastre rettangolari isotrope; egli riformulò il sistema in modo da poterne estrapolare gli autovalori col metodo di Rayleigh. In questo modo la funzione di deflessione è espressa come prodotto di funzioni di spostamento monodimensionali indipendenti fra loro. Si ha

$$W(x, y) = X(x)Y(y)$$

Dove $X(x)$ e $Y(y)$ sono essenzialmente funzioni di forma e sono scelte come le forme modali fondamentali che presenterebbero delle travi poste rispettivamente lungo X e lungo Y , nelle stesse condizioni di vincolo della piastra (devono cioè rispettare le condizioni al contorno di vincolo). Nel caso di piastre rettangolari ortotrope le soluzioni proposte sono determinate da lavoro di Hearmon, il quale, usando lo stesso approccio di Rayleigh per la risoluzione dell'equazione differenziale generale, va a estendere la formulazione di Warburton anche alle piastre rettangolari ortotrope. Il risultato di Hearmon è riportato nella seguente formula, con la quale è possibile determinare le frequenze naturali per tutti i modi di vibrazione:

$$\omega^2 = \frac{1}{\rho} \left(\frac{A^4 D_x}{a^4} + \frac{B^4 D_y}{b^4} + \frac{2CD_{xy}}{a^2 b^2} \right)$$

Dove A, B e C sono coefficienti empirici dipendenti dalla tipo di vincolo ai lati della piastra e ρ rappresenta la sua densità superficiale espressa in Kg/mm².
per il caso C-C-C-C (full clamped) abbiamo:

Boundary conditions	A	B	C	m	n
	4.730	4.730	151.3	1	1
	4.730	ϵ_2	$12.30\epsilon_2(\epsilon_2 - 2)$	1	2, 3, 4, ...
	γ_2	4.730	$12.30\gamma_2(\gamma_2 - 2)$	2, 3, 4, ...	1
	γ_2	ϵ_2	$\gamma_2\epsilon_2(\gamma_2 - 2)(\epsilon_2 - 2)$	2, 3, 4, ...	2, 3, 4, ...

E anche:

$$\gamma_0 = m\pi$$

$$\gamma_1 = \left(m + \frac{1}{4}\right)\pi$$

$$\gamma_2 = \left(m + \frac{1}{2}\right)\pi$$

$$\epsilon_0 = n\pi$$

$$\epsilon_1 = \left(n + \frac{1}{4}\right)\pi$$

$$\epsilon_2 = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi$$

Detto ciò passiamo al calcolo delle frequenze naturali per i primi 8 modi di vibrazione della configurazione 8L. Data la semplicità dei calcoli ci affidiamo ad un foglio di lavoro Excel. I risultati sono riportati nel paragrafo dedicato.

3.5.3 CALCOLO FEM 2D

Per l'analisi FEM di questa configurazione ne costruiamo il modello 2D in ambiente Patran scegliendo elementi 2D tipo SHELL per la modellazione del laminato.

Innanzitutto si crea la geometria, poi i materiali, la mesh 2D di 90 x 180 elementi e si attribuiscono le proprietà del laminato agli elementi shell. Successivamente si imposta il vincolo di traslazione e rotazione nulla ai bordi e si lancia l'analisi Nastran impostata sul solution type 103-modal analysis. Con Patran si possono creare laminati semplicemente inserendo la sequenza di strati e le caratteristiche di ogni strato (materiale, spessore, orientamento fibre); fatto questo, il software concentra le caratteristiche globali del laminato creato, nella sua superficie media.

Noi creeremo due laminati: uno composto da tutti gli strati previsti, compresi pannelli fotovoltaici e cover glass di protezione, e l'altro composto dai soli strati interni, ossia gli 8 strati di FR4, per poter confrontare l'analisi FEM coi risultati analitici prima trovati.

Sotto possiamo vedere la creazione del laminato comprensivo di cover glass e pannelli.

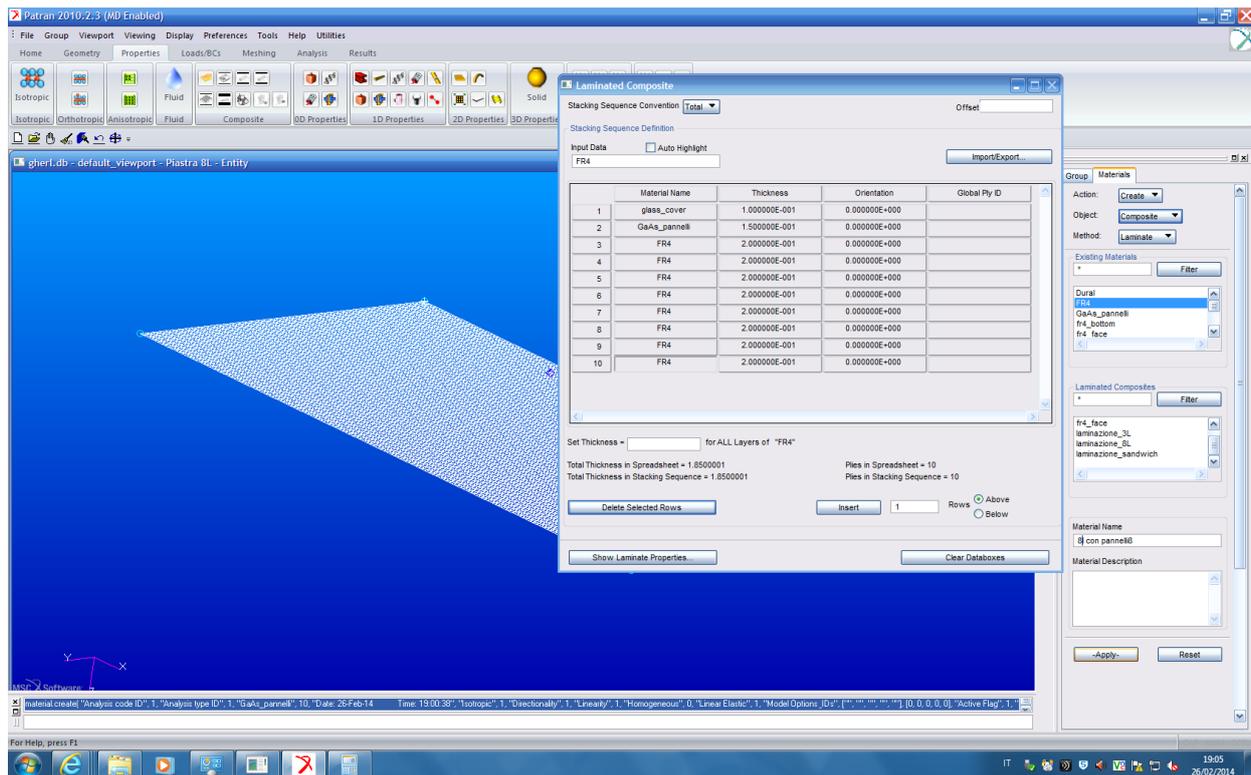


Figura 38- Creazione laminato 8L con pannelli fotovoltaici e cover glass in Patran

Impostiamo i parametri per l'analisi modale (modal analysis - solution type 103) e lanciamo il calcolatore Nastran per la ricerca dei primi 15 autovalori e corrispettivi autovettori del sistema dinamico libero.

Sotto possiamo vedere alcuni degli autovettori o deformate in vibrazione autonoma e la relazione tra il numero di semionde lungo i due lati della piastra e il numero del modo (autovalore) corrispondente.

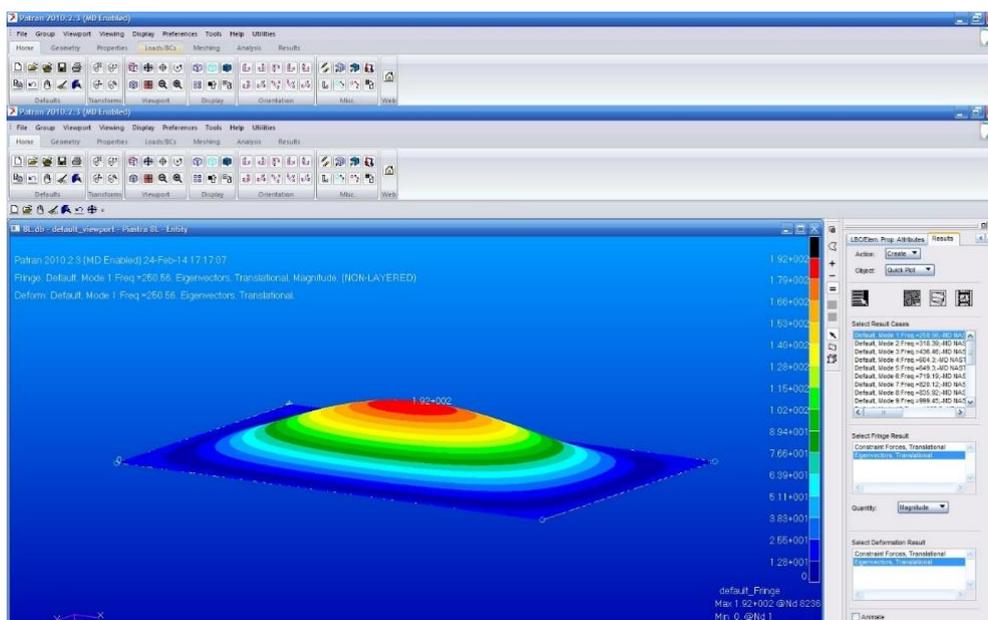


Figura 39 - 1° modo di vibrazione naturale

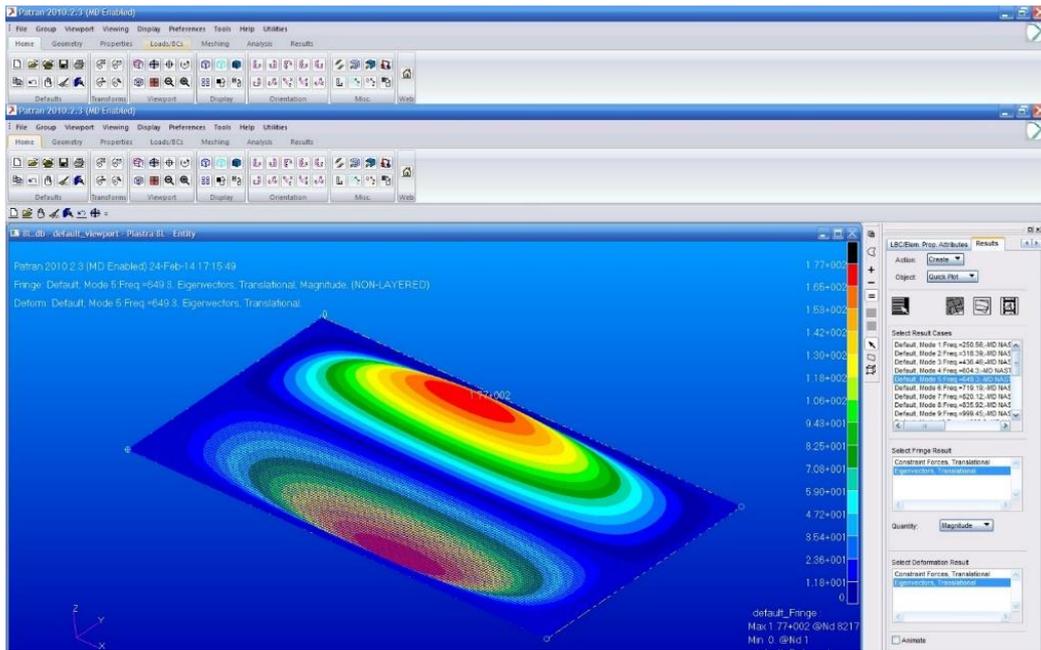


Figura 40 - 5° modo di vibrazione naturale

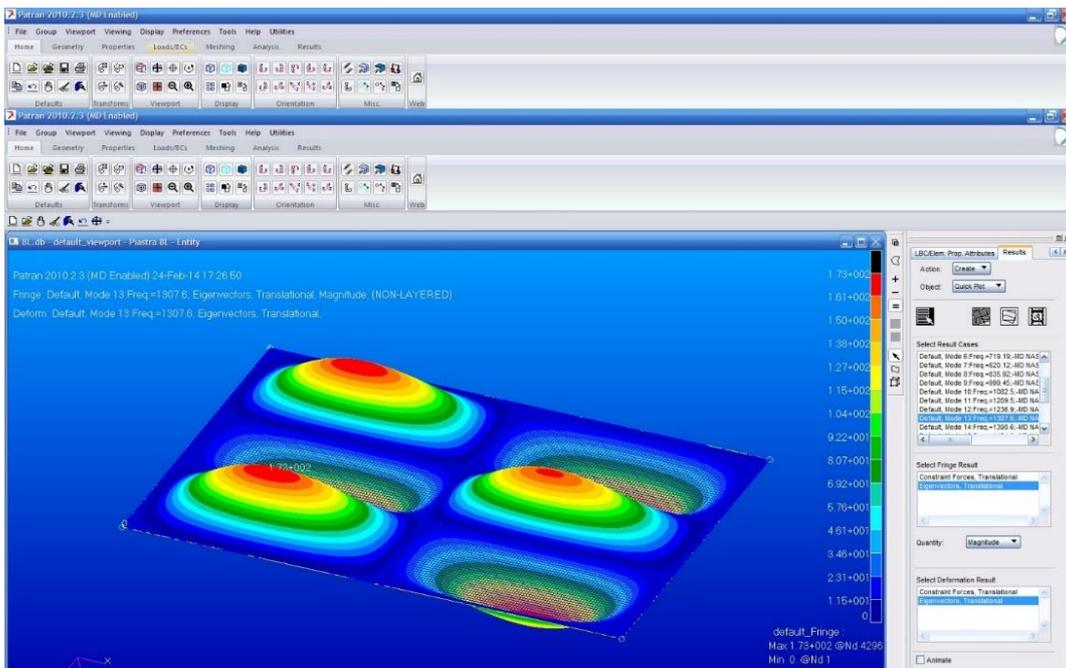


Figura 41 - 13° modo di vibrazione

3.6 ANALISI MODALE CONFIGURAZIONE SANDWICH

La seconda configurazione della tile analizzata è il sandwich, con le facce in FR4 spesse 0.3 mm esternamente e 0.8 internamente, ed il core in honeycomb in lega d'alluminio 5052 spesso 6,35 mm. L'honeycomb lo prendiamo dall'azienda *Plascore*, specialista nel settore.

Dato il rapporto tra il lato corto della piastra "b" e lo spessore "h" che vale $159/(0,3+0,8+6,35) \approx 21$ possiamo ancora trattare l'analisi di questa configurazione con la teoria FSDT, ma non con la CLT.

Condurremo allora la parte analitica con la teoria FSDT e l'analisi FEM sia in 2D, in modo da confrontarne i risultati con quelli analitici, sia in 3D con elementi solidi per valutare quanto i due approcci differiscano.

3.6.1 DETERMINAZIONE ANALITICA

Impostiamo le equazioni costitutive del modello FSDT in modo da estrapolarne l'equazione differenziale della piastra inflessa.

Definendo il campo di deformazioni [3], tramite immediata derivazione delle equazioni del campo di spostamenti definito sopra, scriviamo:

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \varepsilon_x^0 + zk_x = u_{,x}^0 + z\varphi_{x,x} \\ \varepsilon_y = \varepsilon_y^0 + zk_y = v_{,y}^0 + z\varphi_{y,y} \\ \gamma_{xy} = \gamma_{xy}^0 + zk_{xy} = (u_{,y}^0 + v_{,x}^0) + z(\varphi_{x,y} + \varphi_{y,x}) \\ \gamma_{xz} = \gamma_{xz}^0 = \varphi_x + w_{,x}^0 \\ \gamma_{yz} = \gamma_{yz}^0 = \varphi_y + w_{,y}^0 \end{cases}$$

Dove $\varepsilon_x, \varepsilon_y$ indicano le deformazioni lineari, mentre $\gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$ indicano gli scorrimenti a taglio noti anche come $\varepsilon_{xy}, \varepsilon_{xz}, \varepsilon_{yz}$.

E' a questo punto utile suddividere $\{\sigma\}, \{\varepsilon\}, [Q^k]$ in due contributi, uno di flessione (pedice "b" ossia "bending"), il quale coinvolge le sollecitazioni membranali, e uno di taglio (pedice "sh" o shear).

$$\{\sigma_b\}^T = \{\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}\}$$

$$\{\sigma_{sh}\}^T = \{\sigma_{xz}, \sigma_{yz}\}$$

$$\{\varepsilon_b\}^T = \{\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \gamma_{xy}\} = \{\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{xy}\}$$

$$\{\varepsilon_{sh}\}^T = \{\gamma_{xz}, \gamma_{yz}\} = \{\varepsilon_{xz}, \varepsilon_{yz}\}$$

$$[Q_b^k] = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{16} \\ Q_{12} & Q_{22} & Q_{26} \\ Q_{16} & Q_{26} & Q_{66} \end{bmatrix}$$

$$[Q_{sh}^k] = \begin{bmatrix} Q_{44} & Q_{45} \\ Q_{45} & Q_{55} \end{bmatrix}$$

Ma se le direzioni X e Y coincidono con quelle di ortotropia come nel nostro caso si ha che la matrice si riduce a:

$$[Q^k]_{LT} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{55} \end{bmatrix}$$

Dal sistema in cui abbiamo definito le deformazioni otteniamo il vettore delle deformazioni membranali:

$$\{\varepsilon_b\} = \{\varepsilon_b^0\} + z\{k\}$$

Dove:

$$\{\varepsilon_b^0\}^T = \{\varepsilon_{xx}^0, \varepsilon_{yy}^0, \varepsilon_{xy}^0\}$$

è il vettore delle deformazioni membranali della superficie di riferimento (per noi sarà il piano medio della piastra) e:

$$\{k\}^T = \{\varphi_{x,x}, \varphi_{y,y}, \varphi_{x,y} + \varphi_{y,x}\}$$

è il vettore delle curvature.

Sempre dal sistema delle deformazioni otteniamo anche il vettore degli scorrimenti fuori dal piano:

$$\{\varepsilon_{sh}\}^T = \{\varepsilon_{sh}^0\}^T = \{\gamma_{xz}^0, \gamma_{yz}^0\}$$

Per calcolare le risultanti di sollecitazione sulla piastra bisognerà integrare le tensioni derivanti dalla legge di Hooke lungo Z; si otterranno le caratteristiche di sollecitazione, ossia forze e momenti, per unità di lunghezza. Si hanno le seguenti risultanti di tensioni:

$$\{N\}^T = \{N_x, N_y, N_{xy}\}$$

$$\{T\}^T = \{T_x, T_y\}$$

$$\{M\}^T = \{M_x, M_y, M_{xy}\}$$

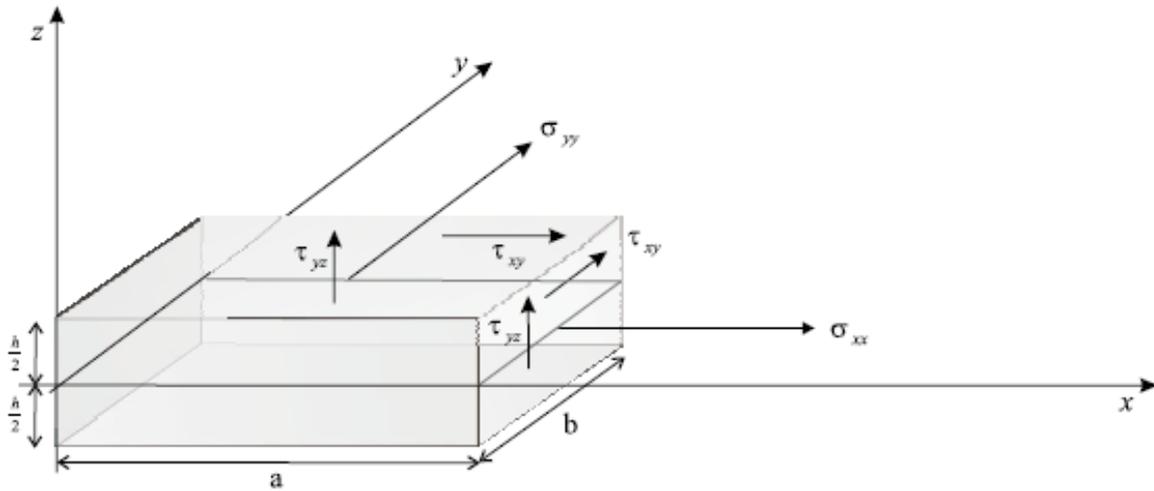


Figura 42 - Riferimenti positivi per tensioni

(si noti il piano di riferimento posto nella mezzeria della piastra);

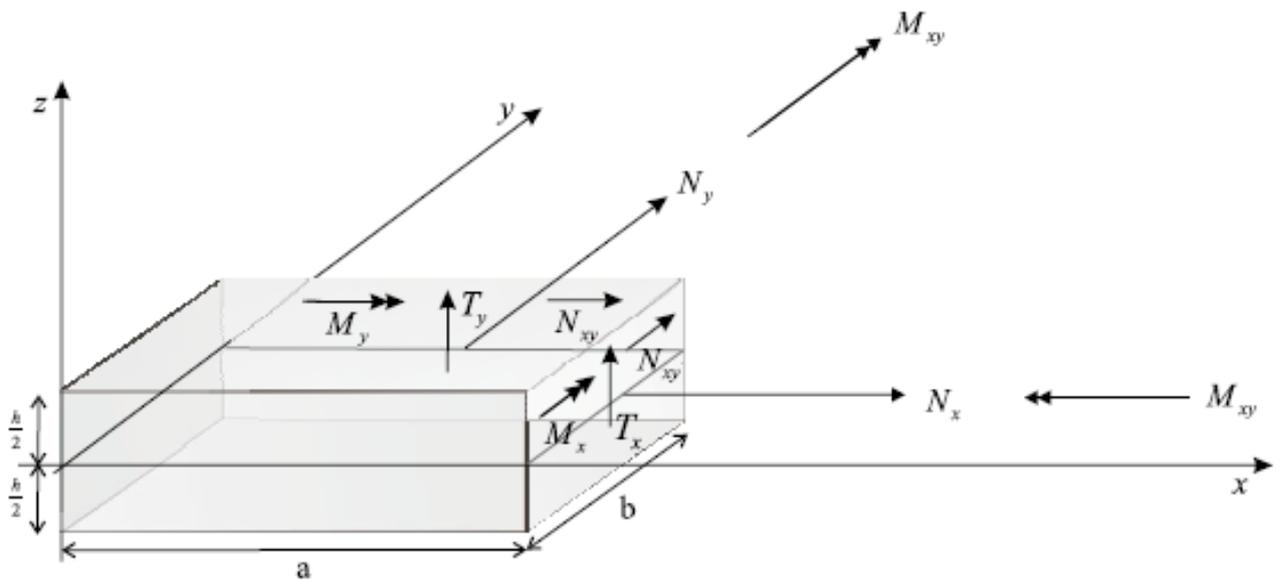


Figura 43 - Riferimenti positivi per azioni di sollecitazione

Avremo quindi:

$$\{N\} = \int_{-h/2}^{h/2} \{\sigma_b\} dz$$

$$\{N\} = \int_{-h/2}^{h/2} [Q_b^k] \{\varepsilon_b\} dz$$

$$\{N\} = \int_{-h/2}^{h/2} [Q_b^k] (\{\varepsilon_b^0\} + z\{k\}) dz$$

$$\{N\} = [A] \{\varepsilon_b^0\} + [B] \{k\}$$

$$\{T\} = \int_{-h/2}^{h/2} \{\sigma_{sh}\} dz$$

$$\{T\} = \int_{-h/2}^{h/2} [Q_{sh}^k] \{\varepsilon_{sh}\} dz$$

$$\{T\} = \int_{-h/2}^{h/2} [Q_{sh}^k] (\{\varepsilon_{sh}^0\}) dz$$

$$\{T\} = [A_{sh}] \{\varepsilon_{sh}^0\}$$

$$\{M\} = \int_{-h/2}^{h/2} z \{\sigma_b\} dz$$

$$\{M\} = \int_{-h/2}^{h/2} [Q_b^k] z \{\varepsilon_b\} dz$$

$$\{M\} = \int_{-h/2}^{h/2} [Q_b^k] (z \{\varepsilon_b^0\} + z^2 \{k\}) dz$$

$$\{M\} = [B] \{\varepsilon_b^0\} + [D] \{k\}$$

Che i forma più compatta si può scrivere:

$$\begin{Bmatrix} \{N\} \\ \{M\} \\ \{T\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [A] & [B] & [0] \\ [B] & [D] & [0] \\ [0] & [0] & [A_{sh}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\varepsilon_b^0\} \\ \{k\} \\ \{\varepsilon_{sh}^0\} \end{Bmatrix}$$

dove:

$[A_b]$ è la matrice di rigidezza membranale;

$[A_{sh}]$ è la matrice di rigidezza a taglio, che, unita con $[A_b]$ forma la rigidezza estensionale del laminato;

$[B]$ è la matrice di accoppiamento;

$[D]$ è la matrice di rigidezza flesso-torsionale.

In modo esplicito tali matrici possono essere calcolate come segue:

$$\begin{aligned} [A] &= \sum_{K=0}^{Nstrati} \int_{z_k}^{z_{k+1}} [Q^k] dz && = \text{matrice delle rigidezze membranali} \\ [B] &= \sum_{K=0}^{Nstrati} \int_{z_k}^{z_{k+1}} z [Q^k] dz && = \text{matrice delle rigidezze di accoppiamento} \\ [D] &= \sum_{K=0}^{Nstrati} \int_{z_k}^{z_{k+1}} z^2 [Q^k] dz && = \text{matrice delle rigidezze flesso-torsionali} \end{aligned}$$

Tali matrici hanno le seguenti proprietà:

- Le matrici $[A]$, $[A_{sh}]$, $[B]$ e $[D]$ sono simmetriche poiché anche $[Q^k]$ (da cui provengono) è simmetrica.
- Le matrici $[A]$ e $[A_{sh}]$ dipendono dal numero, dallo spessore e dal materiale dei vari strati, ma non dalla loro posizione lungo z .
- Le matrici $[B]$ e $[D]$ dipendono dal numero, dallo spessore, dal materiale e dalla posizione lungo z dei vari strati.

E' importante notare che quando $[B]=[0]$ siamo nel caso di laminazione simmetrica.

$[B]$ è detta matrice di accoppiamento perché, quando è nulla, accade che gli sforzi $\{N\}$ provocano soltanto deformazioni membranali; ossia gli sforzi normali sono disaccoppiati da quelli flesso-torsionali.

Purtroppo la configurazione in analisi non è simmetrica è quindi vi sarà accoppiamento flesso-torsionale e $[B]$ non sarà nulla.

L'introduzione delle matrici $[A]$, $[B]$ e $[D]$ (che si ottengono a partir delle $[Q^k]$, opportunamente ruotate nel riferimento X-Y), ci permette di lavorare come se fossimo in condizioni di piastra isotropa e questo perché tali matrici nascondono al loro interno tutte le informazioni riguardanti la stratificazione.

FATTORE DI TAGLIO

Per fornire risultati attendibili, la teoria di Mindlin considera l'effetto di scorrimento trasversale del core del sandwich legato ad un coefficiente chiamato *shear correction factor*.

Questo è una costante che dipende dalla laminazione adottata, dal materiale del core (soprattutto dal suo coefficiente di poisson), dall'eterogeneità dei materiali presenti, e dagli spessori relativi.

Esso va a moltiplicare i coefficienti Q_{44} e Q_{55} nella matrice delle rigidzze ridotte del core.

La sua determinazione è affidata al documento [16] dal quale otteniamo per il sandwich col core in honeycomb:

$$k_x^2 = 0.35974$$

$$k_y^2 = 0.1801$$

mentre per la configurazione 3L, essendo l'eterogeneità della piastra abbastanza e lo spessore relativo molto contenuti, usiamo la formula del fattore di correzione del taglio per piastre omogenee:

$$K_S = \frac{5}{6 - \nu}$$

$$k_x^2 = k_y^2 = 0.877$$

3.6.2 EQUAZIONI DI EQUILIBRIO DELLA PIASTRA

Considerando ora un elemento di piastra di dimensioni $dx * dy$ possiamo scrivere le equazioni di equilibrio di tale elemento.

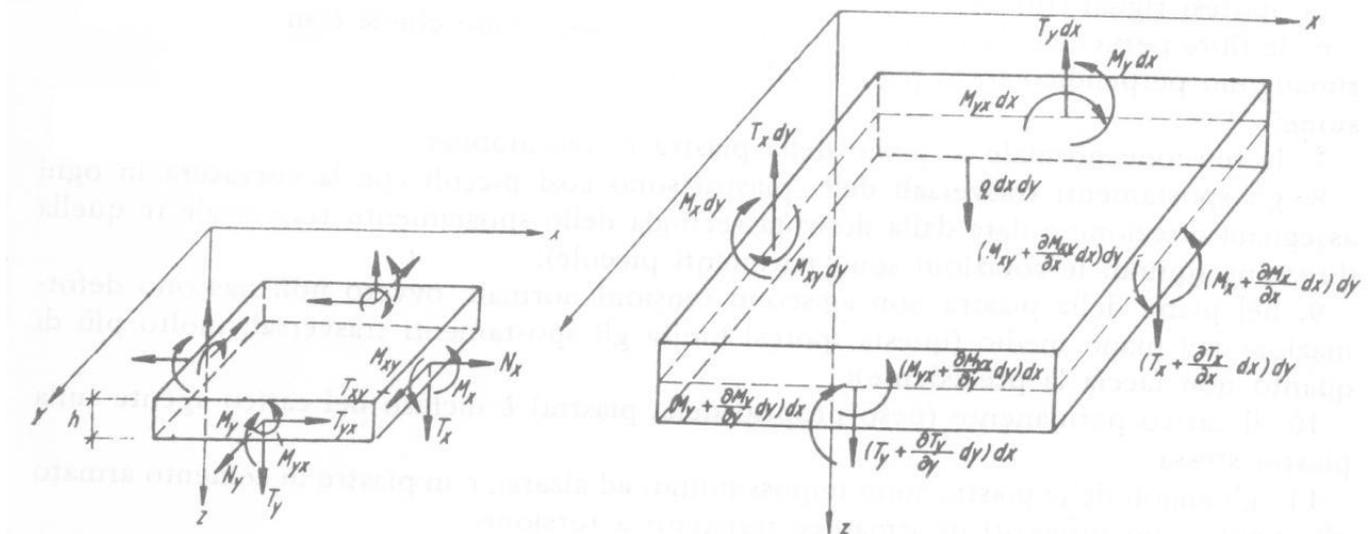


Figura 44- Schema piastra equilibrata

Dall'equazione di equilibrio alla rotazione attorno all'asse X risulta:

$$\frac{\partial M_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial M_x}{\partial x} - T_x = 0$$

Dall'equilibrio alla rotazione attorno all'asse Y si ha:

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial M_y}{\partial y} + T_y = 0$$

Dall'equazione di equilibrio alla traslazione in direzione Z si ha:

$$\frac{\partial T_x}{\partial x} + \frac{\partial T_y}{\partial y} + q = 0$$

Dove q indica il carico che, nel caso generale, è funzione di X e di Y.

Tramite l'equazione di equilibrio alla traslazione lungo l'asse Z ed esplicitando le caratteristiche di sollecitazione tramite le equazioni costitutive già viste

$$\begin{Bmatrix} \{N\} \\ \{M\} \\ \{T\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [A] & [B] & [0] \\ [B] & [D] & [0] \\ [0] & [0] & [A_{sh}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\varepsilon_b^0\} \\ \{k\} \\ \{\varepsilon_{sh}^0\} \end{Bmatrix}$$

Otteniamo il sistema di equazioni differenziali della superficie inflessa della piastra multistrato, il quale però non è corretto per la determinazione delle frequenze naturali, in quanto in esso non compaiono i termini inerziali.

Considerando anche i termini inerziali nelle equazioni di equilibrio, il sistema di equazioni del moto finale derivante dal modello di Mindlin è il seguente:

$$\begin{aligned} N_{1,1} + N_{12,2} &= I_0 u + I_1 \theta_1 \cdot \\ N_{12,1} + N_{2,2} &= I_0 v + I_1 \theta_2 \cdot \\ Q_{1,1} + Q_{2,2} &= I_0 w \\ M_{1,1} + M_{12,2} - Q_1 &= I_1 u + I_2 \theta_1 \cdot \\ M_{2,2} + M_{12,1} - Q_2 &= I_1 v + I_2 \theta_2 \\ M_{1,1}^\phi + M_{12,2}^\phi - Q_1^\phi &= I_0^{\phi 1} u + I_1^{\phi 1} \theta_1 \cdot \\ M_{2,2}^\phi + M_{21,1}^\phi - Q_2^\phi &= I_0^{\phi 2} v + I_1^{\phi 2} \theta_2 \cdot \end{aligned}$$

3.6.3 IL PROBLEMA DELL'INCASTRO – APPLICAZIONE DEI METODI VARIAZIONALI

Ora abbiamo un problema.

Generalmente si modella la soluzione w con una funzione armonica 2D dipendente da x, y , dalla pulsazione e dal numero di semionde voluto lungo le due direzioni. Fatto ciò si calcolano gli autovalori del sistema di due equazioni risultanti in cui si scompone la dipendenza da x a quella da

y.

Il problema è che ciò è fattibile solo in caso di piastra appoggiata, in caso di incastro non possiamo modellare la soluzione come funzione armonica, perché non esistono soluzioni armoniche che rispettino la condizione al contorno associata all'incastro.

Data l'assenza di approcci analitici validi per piastre multistrato asimmetriche in letteratura e l'impossibilità di modellare la soluzione in modo armonico, a causa dell'incastro, dobbiamo procedere in modo alternativo.

Si osservi che per sistemi non smorzati l'equazione del moto può essere scritta sfruttando il principio di conservazione dell'energia [9]. Infatti, in assenza di forzanti esterne non conservative, l'energia totale del sistema, ossia la somma fra energia cinetica e potenziale, si mantiene costante:

$$\frac{d}{dt}(T + V) = 0$$

Ove le energie sono definite come:

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 \quad V = \frac{1}{2} k x^2$$

Detto questo possiamo vedere come dalla conservazione dell'energia si possa determinare l'equazione del moto:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} k x^2 \right) = m \dot{x} \ddot{x} + k x \dot{x} = \dot{x} (m \ddot{x} + k x) = 0$$

Ottenendo infine la forma voluta:

$$m\ddot{x} + kx = 0$$

Il principio di conservazione dell'energia può essere impiegato anche per determinare direttamente la pulsazione naturale del sistema. Indicate con 1 e 2 le configurazioni del sistema corrispondenti a due istanti generici, si ha:

$$T1 + V1 = T2 + V2$$

Se si considera come istante 1 quello in cui il sistema passa per la posizione di equilibrio statico (scelta come riferimento per l'energia potenziale) e, di conseguenza, l'energia cinetica è massima, si avrà:

$$U1 = 0 \quad T1 = T_{MAX}$$

Se come istante 2 si prende quello in cui è massimo lo spostamento del sistema dalla sua posizione di equilibrio statico (e quindi è nulla la velocità), l'energia potenziale è massima e si annulla l'energia cinetica:

$$T2 = 0 \quad U2 = U_{MAX}$$

Per il principio di conservazione dell'energia segue che:

$$T_{MAX} = U_{MAX}$$

L'applicazione di questa equazione porta alla scrittura di un sistema di $n \times n$ equazioni algebriche lineari dal quale è possibile determinare direttamente le frequenze naturali del sistema differenziale di partenza, calcolandone gli autovalori.

Un modo valido di procedere tramite metodo energetico (o variazionale) molto usato nei problemi dinamici, è rappresentato dal metodo di risoluzione di sistemi di equazioni differenziali di Rayleigh-Ritz, il quale approssima le incognite con una combinazione lineare delle funzioni che modellano la deformazione assunta dalla struttura in vibrazioni armoniche libere.

Queste funzioni, che approssimano le incognite con combinazioni lineari di polinomi ortogonali fra loro moltiplicati per una certa costante, dovranno soddisfare semplicemente le condizioni cinematiche al contorno della struttura, imposte dal tipo di vincolo ai bordi.

Impostando con questa modellazione delle variabili incognite la conservazione dell'energia, otteniamo un sistema algebrico lineare con vettore delle incognite le costanti dei polinomi approssimanti, e, con autovalori, il quadrato delle pulsazioni fondamentali. La forma generale di tale sistema è proprio quella a cui si vuole arrivare, ossia:

$$(-[m]\omega^2 + [k])\{A\} = 0$$

Dove $[m]$ e $[k]$ sono le matrici di massa e rigidezza del sistema e ω sono le sue pulsazioni naturali. Si noti come in definitiva il sistema finale a cui si vuole arrivare, dipenda dalla scrittura delle matrici di massa e rigidezza del sistema iniziale.

Riassumendo, il metodo di Rayleigh è una generalizzazione del metodo dell'energia: viene assunta una "ragionevole deformata" per il sistema vibrante e in base a questa vengono determinati ed eguagliati i valori massimi di energia cinetica e potenziale.

Fatto ciò, come detto, si otterrà un sistema di $n \times n$ equazioni algebriche con incognite i coefficienti dei polinomi che approssimano le incognite cinematiche di partenza e con autovalori le pulsazioni fondamentali del sistema.

Ovviamente, il risultato sarà tanto più accurato quanto più la deformata assunta si avvicina a quella reale.

Vediamo come procedere.

3.6.3 APPLICAZIONE DEL METODO DI RAYLEIGH-RITZ: DETERMINAZIONE DELLA MATRICE DELLE MASSE [M]

Il procedimento generale per applicare il metodo di Rayleigh - Ritz è il seguente:

- si formula una "ragionevole ipotesi" sulla deformata;
- si esprimono, sulla base di tale ipotesi, l'energia cinetica e quella potenziale di deformazione;
- si scrivono le equazioni del moto (equazioni di Lagrange);
- si ricavano frequenze proprie e modi di vibrare tramite la ricerca degli autovalori.

Tutti i passaggi di calcolo saranno effettuati in ambiente matlab, in cui la ricerca degli autovalori del sistema finale sarà demandata al comando `eig (K,M)`.

L'energia cinetica E_c di un generico corpo può scriversi come:

$$E_c = \frac{1}{2} \int_V \{\dot{s}\}^T \rho \{\dot{s}\} dV$$

Dove ρ è la densità volumica e $\{s\}$ è il vettore spostamento.

Da questa vogliamo ricondurci alla forma

$$E_c = \frac{1}{2} \{\dot{S}\}^T [K_M] \{\dot{S}\}$$

in modo da estrapolarne la matrice delle masse qui indicata come $[K_M]$.

Abbiamo che il generico vettore spostamento $\{s\} = [u_x \ u_y \ u_z]$ potrà scriversi come prodotto tra la matrice del metodo agli spostamenti adottato e le incognite di quel metodo, che per Mindlin sono gli spostamenti e le rotazioni valutate nel piano medio $[u^0, v^0, w^0, \varphi_x^0, \varphi_y^0]$ che noi rappresenteremo col vettore $\{s^0\}$ e che sarà funzione di (x, y, t) . Si avrà:

$$\{s\} = [M] \{s^0\}$$

Dove $[M]$ rappresenta il metodo agli spostamenti considerato, ossia:

$$\begin{cases} u(x,y,z) = u^0(x,y) + z\varphi_x(x,y) \\ v(x,y,z) = v^0(x,y) + z\varphi_y(x,y) \\ w(x,y,z) = w^0(x,y) \end{cases} \Rightarrow [M] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & z & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & z \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Sostituendo dentro la formula dell'energia cinetica si ha:

$$E_c = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \int_{-h/2}^{h/2} \{\dot{s}^0\}^T [M]^T \rho [M] \{\dot{s}^0\} dz d\Omega$$

E siccome $\{s^0\}$ non dipende da z lo possiamo portare fuori dall'integrale in dz , rimarrà:

$$E_c = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \{\dot{s}^0\}^T \int_{-h/2}^{h/2} [M]^T \rho [M] dz \{\dot{s}^0\} d\Omega$$

L'integrale in dz si può calcolare siccome sappiamo valere la relazione:

$$\int_V dV = \int_{-h/2}^{+h/2} dz \int_{\Omega} d\Omega = \sum_{K=0}^{Nstrati} \int_{z_k}^{z_{k+1}} dz \int_{\Omega} d\Omega$$

Questo risulterà una matrice di costanti chiamata $[MZI]$ nel codice di calcolo. Abbiamo a questo punto:

$$E_c = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \{\dot{s}^0\}^T [MZI] \{\dot{s}^0\} d\Omega$$

Ora modelliamo il campo di spostamenti del piano medio $\{S^0\}$ con Rayleigh-Ritz, usando la doppia sommatoria che segue, nella quale le funzioni di forma devono formare una base ortogonale fra loro e rispettare le condizioni di vincolo ai bordi del dominio.

$$(u, v, w, \theta_1, \theta_2) = \sum_{m=1}^M \sum_{p=1}^P (U_{mp}, V_{mp}, W_{mp}, \Theta_{1mp}, \Theta_{2mp}) \chi_m(x_1) \chi_p(x_2)$$

Dove X_m e X_p sono i polinomi ortogonali di Gram-Schmidt che rispettano la condizione di spostamenti e rotazioni nulle all'incastro e che formano una base ortogonale; tali polinomi sono definiti come sotto

$$X_i(x) = \left(\frac{x}{a}\right)^i - \left(\frac{x}{a}\right)^{i+1}$$

$$Y_i(y) = \left(\frac{y}{b}\right)^i - \left(\frac{y}{b}\right)^{i+1}$$

Si sono espansi fino a $i=3$ i polinomi di $u, v, \varphi_x, \varphi_y$ mentre fino a $i=4$ per la w , e questo dovendo essere questa per definizione di un grado più alta delle φ .

$$X_1 = \left(\frac{x}{a}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{a}\right)^3 + \left(\frac{x}{a}\right)^4$$

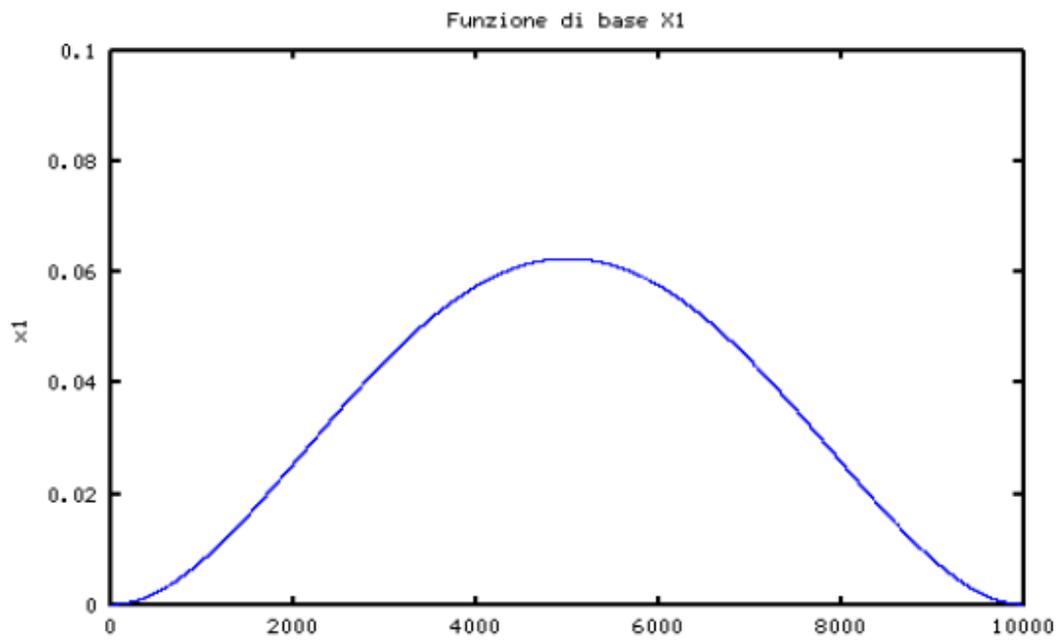


Figura 45 - Andamento funzione di forma X1

$$X_2 = \left(\frac{x}{a}\right)^3 - 2\left(\frac{x}{a}\right)^4 + \left(\frac{x}{a}\right)^5$$

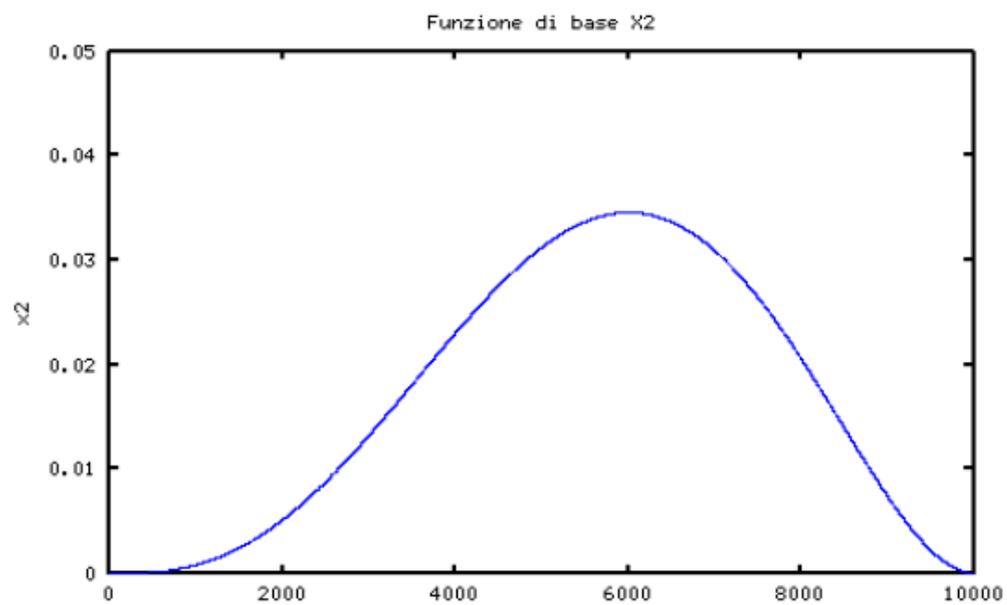


Figura 46 - Andamento funzione di forma X2

Scriviamo allora che con questa modellazione avremo:

$$\{s^0\} = [N(x,y)] \{q(t)\}$$

Dove $q(t)$ è il vettore delle costanti di Rayleigh, mentre $[N]$ è la matrice delle combinazioni delle funzioni di forma, ossia dei polinomi di Gram-Schmidt che moltiplicando tali coefficienti modellano i vari spostamenti del piano medio. Si noti che con l'espansione dei polinomi fino al 3 e 4 grado, si ottiene una vettore $q(t)$ di 52 righe e una matrice $[N]$ di 5 x 52 elementi.

Inseriamo tutto ciò nell'energia cinetica:

$$E_c = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \{\dot{q}\}^T [N]^T [MZI] [N] \{\dot{q}\} d\Omega$$

Portiamo fuori dall'integrale di superficie ciò che non dipende dalle variabili x e y , ossia il vettore delle costanti di Rayleigh $\{q\}$ derivate nel tempo e otteniamo:

$$E_c = \frac{1}{2} \{\dot{q}\}^T \int_{\Omega} [N]^T [MZI] [N] d\Omega \{\dot{q}\}$$

Che rappresenta proprio la forma cercata dell'energia cinetica, e dalla quale estrapoliamo la matrice delle masse:

$$[M] = \int_0^b \int_0^a [N]^T [MZI] [N] dx dy$$

Il doppio integrale lo calcoliamo con il metodo di Gauss [10], per il quale:

$$I = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(p, q) dp dq \approx \int_{-1}^1 \sum_{j=1}^N H_j f(p_j, q) dq$$

$$I \approx \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N H_i H_j f(p_j, q_i)$$

ossia come sommatoria della matrice integranda calcolata in punti specifici del dominio X-Y moltiplicati per definiti pesi H ; entrambi i valori si trovano descritti dalla seguente tabella.

N	p_i	H_i
3	-0.77460	0.55556
	0.00000	0.88889
	0.77460	0.55556
5	-0.90618	0.23693
	-0.53847	0.47863
	0.00000	0.56889
	0.53847	0.47863
	0.90618	0.23693

Figura 47 - Punti di calcolo significativi e pesi di Gauss

Noi, per non appesantire i calcoli, adotteremo $N=3$.

3.6.4 APPLICAZIONE DEL METODO DI RAYLEIGH-RITZ: DETERMINAZIONE DELLA MATRICE DI RIGIDEZZA [K]

Per la determinazione diretta della matrice di rigidezza globale della piastra procediamo in maniera analoga considerando l'espressione dell'energia potenziale di deformazione di un generico corpo elastico e ricordando le equazioni costitutive della piastra che legano tensioni a deformazioni:

$$L_p = \int_V \{\sigma\}^T \{\varepsilon\} dV$$

Che vogliamo portare alla seguente forma:

$$L_p = \{S\}^T [K] \{S\}$$

Scriviamo le tensioni sviluppando le equazioni costitutive del modello i cui compare la matrice delle rigidezze ridotte, integriamo lungo gli strati della piastra tutto ciò che dipende solo da z e sviluppiamo gli spostamenti con le stesse funzioni di Rayleigh-Ritz. Concludiamo che la matrice di rigidezza vale:

$$[K] = \int_0^b \int_0^a [N]_k^T [KZI] [N]_k dx dy$$

Si noti che la matrice delle funzioni di forma qui chiamata $[N]_k$ avrà 12 righe e non 5 in quanto non compaiono i soli spostamenti del piano medio da approssimare, ma anche alcune delle loro derivate lungo X e Y . $[KZI]$ si trova come per le masse, ossia integrando lungo i 3 strati le sole funzioni che dipendono da z , che in questo caso sono rappresentate dal prodotto della matrice del modello per la sua matrice delle rigidezze ridotte.

Calcoliamo l'integrale doppio finale sempre con Gauss.

Tutti i risultati determinati con questo approccio vengono riportati nel capitolo dedicato, mentre il codice Matlab con cui si sono calcolate le matrici e gli autovalori del problema e riportato in

appendice.

3.6.5 CALCOLO FEM- MODELLO 2D-LAMINATED

Inseriamo i passaggi fondamentali della creazione del modello FEM in Patran e i relativi risultati dell'analisi modale condotti con Nastran.

Con Patran creiamo innanzitutto la geometria 2D della piastra, poi nella Properties i materiali ed i modelli laminati del sandwich sia per la configurazione con pannelli che senza, li modelliamo utilizzando delle shell, creiamo la mesh di 90 x 180 elementi sulla geometria del piano medio e successivamente analizziamo con Nastran.

3.6.6 ANALISI FEM-MODELLO 3D

Avendo questa configurazione uno spessore relativo circa doppio rispetto alle altre due, creiamo anche un modello 3D del sandwich per avere risultati più attendibili.

Innanzitutto creiamo la geometria solida del core spesso 6,35 mm estraendo le superfici create prima.

Successivamente creiamo la mesh del solido con 4 x 90 x 180 elementi solidi e la mesh delle sue superfici superiore ed inferiore con lo stesso numero di elementi Quad4.

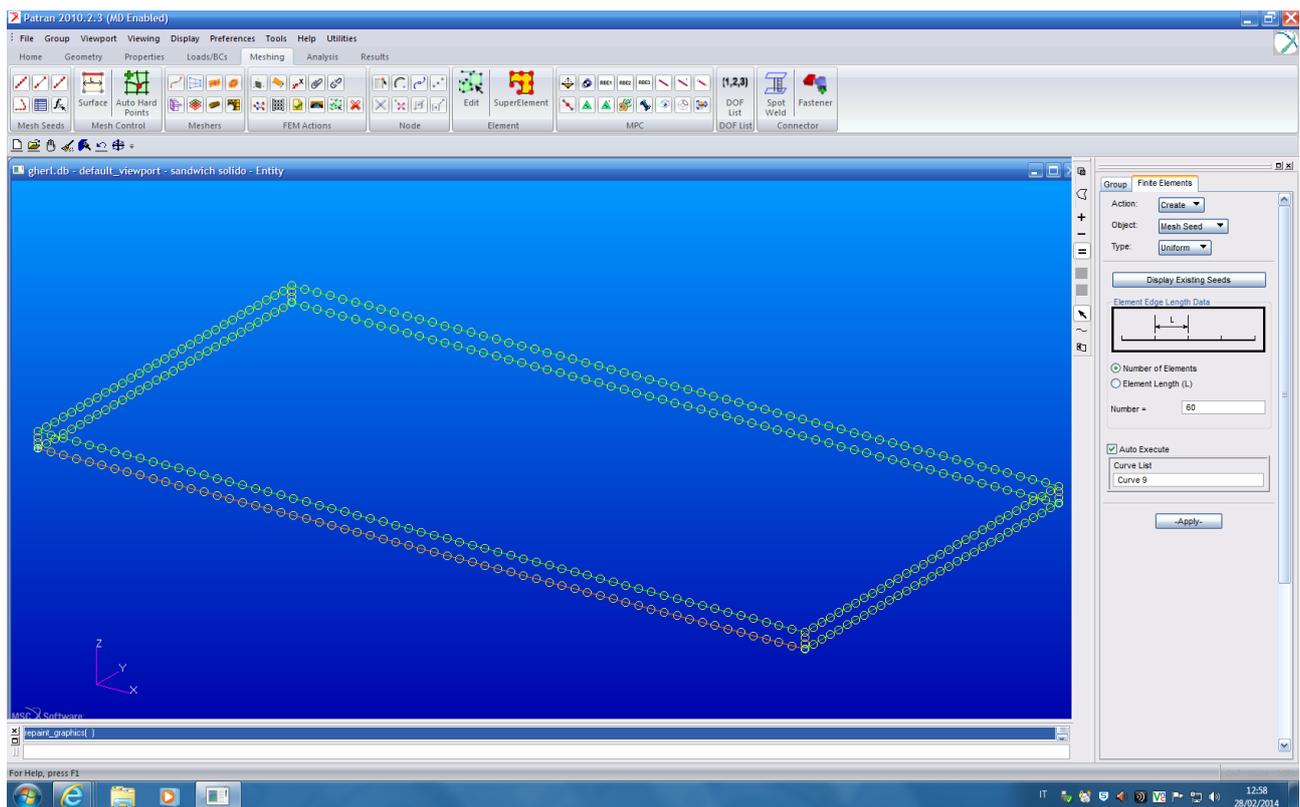


Figura 48- mesh seed del solido

Creiamo le proprietà del honeycomb e dei laminati che andremo ad attribuire alle superfici del solido, i quali sono gli strati di PCB esterno ed interno; si faccia attenzione che il calcolatore attribuisce le proprietà dei laminati al loro piano medio, per cui nella definizione delle facce del sandwich bisognerà impostare la distanza di questo dalla superficie alla quale si attribuisce la proprietà. Questo si fa impostando il parametro di offset.

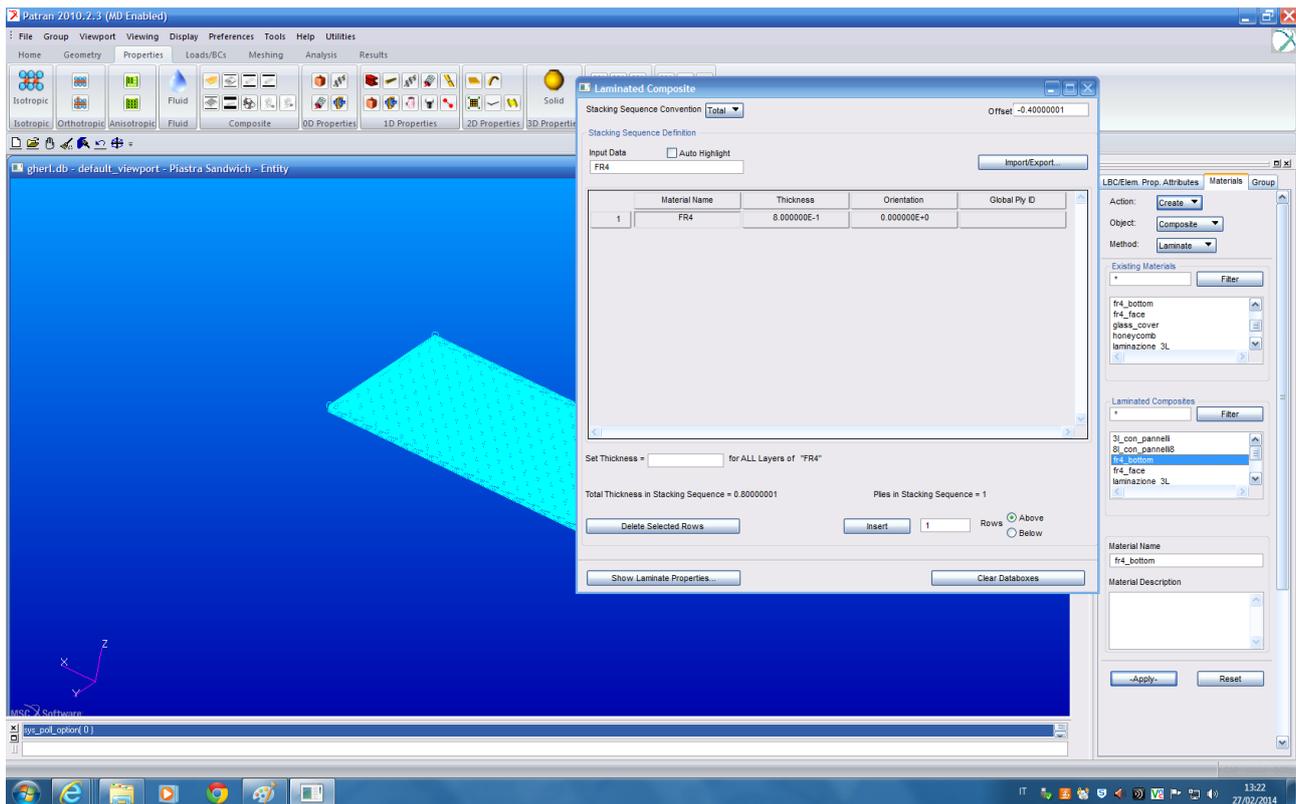


Figura 49 - impostazione del parametro di offset per i piani medi delle facce del sandwich

Successivamente si attribuiscono le proprietà create agli elementi che gli competono, e cioè agli elementi solidi per il core e alle shell per le facce; si crea il vincolo di incastro selezionando tutti i nodi ai bordi, si imposta l'analisi e si lancia Nastran.

Si fa notare che il calcolo risolutivo di un modello FEM 3D come questo mette a dura prova qualsiasi calcolatore, tant'è che per avere i risultati si sono attese circa 9 ore. I risultati sono nel capitolo dedicato.

3.5 ANALISI MODALE CONFIGURAZIONE 3L

Consideriamo l'ultima architettura da analizzare, ovvero quella composta da due strati di FR4 esterni e uno d'alluminio centrale.

Considerando che per questa configurazione il rapporto tra il lato corto della piastra "b" e lo spessore "h" vale $159/2,5 = 63,6$ possiamo affermare che qualsiasi teoria fornirà risultati attendibili.

3.5.1 DETERMINAZIONE ANALITICA

In modo da poter confrontare i risultati analitici con quelli del modello FEM, anche qui scegliamo di adottare il modello FSDT, che è appunto quello usato dal codice Nastran per elementi 2D. Adottiamo lo stesso codice di calcolo già compilato per il sandwich e riportiamo i risultati nel capitolo dedicato.

3.5.2 CALCOLO FEM-MODELLO 2D LAMINATED

Creiamo il laminato 2d per la piastra con pannelli fotovoltaici e senza, modelliamo con delle shell su una mesh di 90 x 180 elementi e lanciamo l'analisi.

Dato l'elevato rapporto b/h non occorre eseguire un'analisi 3D.

4 ANALISI DELLO SPOSTAMENTO TRASVERSALE AL LANCIO

Con gli stessi modelli creati in ambiente Patran per l'analisi modale, andiamo a simulare le condizioni di lancio in cui il piano medio della tile è posto trasversalmente alla direzione di accelerazione assiale del razzo.

Il problema da risolvere in questo caso è il classico caso di risposta inerziale di un sistema ad un'accelerazione, esso è descritto dall'equazione differenziale del moto della piastra in cui l'accelerazione trasversale è conosciuta poiché dettata dal lanciatore.

4.1 MODELLO FEM

Il software FEM calcola gli spostamenti nel dominio 2d della piastra risolvendo l'equazione

$$\{S\}=[N]\{q\}$$

In cui $\{q\}$ è il vettore degli spostamenti nodali, $[N]$ è la matrice delle funzioni di forma ortogonali e $\{S\}$ è lo spostamento del generico punto del dominio. Gli spostamenti nodali si determinano come

$$[K]\{q\} = \{P\}$$

Dove $[K]$ è la matrice di rigidezza globale del sistema e $\{P\}$ è il vettore dei carichi nodali. Per effettuare il calcolo degli spostamenti al lancio consideriamo i modelli creati precedentemente in Patran per effettuare l'analisi modale. Impostiamo il carico "inertial load" sui valori di accelerazione riportati sotto e lanciamo l'analisi (101-static linear) mantenendo l'incastro ai bordi della tile.

I risultati sono riportati nel capitolo dedicato.

4.2 ACCELERAZIONI AL LANCIO

Le accelerazioni di lancio assunte con cui viene calcolato il massimo spostamento trasversale della tile sono le seguenti:

$$a1 = 1g = 9810 \text{ mm/s}^2$$

$$a2 = 5g = 49050 \text{ mm/s}^2$$

$$a3 = 10g = 98100 \text{ mm/s}^2$$

I risultati del massimo spostamento trasversale sono riportati nel capitolo dedicato.

5 ANALISI TERMICA

Andiamo a condurre l'analisi termica della tile di Aramis con l'obiettivo di determinarne i differenziali tipici di temperatura.

5.1 Generalità sull'analisi termica di oggetti orbitanti

Per mantenere il più possibile inalterata l'integrità di sistemi come può essere quello di un satellite (si fa notare che nel caso di sistemi Aramis è prevista una media di vita di 5 anni) è fondamentale il controllo delle temperature e dei flussi termici che vengono continuamente generati e scambiati con l'ambiente esterno.

Benché l'intervallo di temperatura ammissibile per i componenti elettronici sia piuttosto ampio si dovrà però considerare come anticipato, che le condizioni in orbita non permettono la convezione come possibile scambio termico. Inoltre la differenza di temperatura esistente tra il cosiddetto spazio freddo (5 K) e quella raggiungibile da una superficie irradiata dal sole può divenire notevole. Poiché dunque non è possibile affidarsi alla convezione è necessario distribuire forzatamente il calore, spostandolo dalle parti a temperatura più alta a quelle più basse. Diversi sono i metodi adottabili e l'architettura Aramis, considerando piccoli i calori in gioco, prevede che le cosiddette tile svolgano oltre alle diverse funzioni strutturale e di supporto al payload ed ai vari sistemi, debbano anche distribuire per conduzione il calore. Esistono diversi metodi di scambio di energia termica utilizzati nelle applicazioni spaziali, i quali però si discostano dalla trattazione qui effettuata.

Nel presente capitolo si determineranno per ognuna delle tre configurazioni, le differenze di temperatura tipiche che possono nascere sulla tile; esse sono:

- La differenza di temperatura tra il centro della tile e i suoi bordi;
- La differenza di temperatura tra la faccia esterna e quella interna;
- La differenza di temperatura tra lati paralleli;

Per ogni configurazione l'analisi verrà condotta sia considerando la presenza dei pannelli solari, sia escludendola. Verranno considerate inizialmente solo le tile in configurazione 3L e 8L siccome composte da materiali omogenei, per il sandwich, data la complessa geometria delle celle in direzione through plane, faremo una trattazione a parte.

Le fonti di energia da considerare [11], nel caso di satelliti orbitanti ad un'altitudine per la quale l'atmosfera terrestre possa essere considerata assente, sono:

- la produzione interna di calore dovuta ai sistemi ed al payload
- la radiazione solare diretta
- la radiazione solare riflessa dai pianeti vicini detta albedo (nel caso specifico dal pianeta Terra)
- il raffreddamento per irraggiamento verso lo spazio freddo
- la radiazione terrestre
- la conversione di energia solare in energia elettrica
- la capacità termica del sistema stesso

Vediamole in dettaglio.

5.1.1 Radiazione solare

La radiazione solare si compone di tre parametri:

- la distribuzione spettrale, essa può essere considerata costante per il sistema solare e la distribuzione dell'energia si può approssimare ad una curva di Plank con una temperatura effettiva di 5800 K. Si ha che il grosso della radiazione solare è tra i 150 nm e i 10 µm con un massimo vicino ai 450 nm
- l'intensità di radiazione solare J_s può essere espressa in funzione della potenza totale in uscita dal Sole indicata con P e la distanza D

$$J_s = \frac{P}{4\pi D^2} \text{ con } P = 3.8 * 10^{26} \text{ W}$$

- L'angolo di incidenza della radiazione

Possiamo dunque scrivere il valore della cosiddetta "costante solare" ovvero dell'energia per unità di tempo e superficie che raggiunge il pianeta Terra, misurata su una superficie di riferimento esterna all'atmosfera e perpendicolare ai raggi solari. Questo valore è di 1367 W/m² e noi utilizzeremo questo valore per approssimare l'energia che arriva al satellite dal sole.

5.1.2 Albedo

La radiazione che colpisce i pianeti viene in parte restituita da essi. Questa parte di radiazione solare indiretta viene detta albedo e quello relativo al pianeta Terra varia in funzione delle sue condizioni superficiali (nuvole, aree verdi..).

L'albedo può tuttavia essere semplicemente espresso in funzione dell'intensità di radiazione solare J_s , di un valore medio "a" (per quanto riguarda la Terra pari a 0.367), e di un fattore di vista ricavabile da tabelle in base alla posizione.

$$J_a = J_s a F$$

Con $a = 0,4$ per il pianeta terra.

5.1.3 Radiazione di un corpo

L'intensità di radiazione emessa da un corpo immerso nel vuoto è data dalla legge di Stefan-Boltzmann:

$$F(T) = \sigma \alpha T^4$$

dove σ è la costante di Stefan-Boltzmann, α l'assorbanza della superficie e T la sua temperatura assoluta.

5.1.4 Indici di assorbanza ed emissività di un corpo

Si definisce emissività di una superficie il rapporto tra la radiazione emessa dalla superficie e la radiazione emessa dal corpo nero alla stessa temperatura. L'emissività di una superficie si indica con ϵ , varia tra zero e uno ($0 \leq \epsilon \leq 1$) ed è una misura di quanto una superficie reale approssima un corpo nero per il quale $\epsilon = 1$.

La legge di Kirchhoff, basandosi sul primo principio della termodinamica, permette di affermare che in caso di equilibrio termico l'indice di assorbanza eguaglia l'indice di emissività.

Il coefficiente di emissività dipende non solo dal materiale e dalla lunghezza d'onda della radiazione (questa seconda dipendenza viene appianata dalla cosiddetta ipotesi del corpo grigio che prevede l'indipendenza del coefficiente dalla lunghezza d'onda) ma anche dalla qualità della superficie stessa. Ricordiamo infatti che una superficie levigata e liscia avrà sicuramente un indice di assorbanza (e quindi di emissività) minore.

Un metodo di misura di questo coefficiente di assorbanza può essere condotto in laboratorio con la giusta strumentazione. E' necessario infatti l'utilizzo di un simulatore Solare, ossia uno strumento che produce una luce di intensità pari a quella solare.

L'irraggiamento provocato da questo viene diretto sul corpo che intendiamo studiare, facendone aumentare la temperatura. Tramite un sensore si registra dunque tale aumento.

Quando il modulo arriva all'equilibrio termico il simulatore solare viene spento e si registra la differenza di temperatura prodotta dall'irraggiamento. Durante il passo successivo si riproduce la differenza di temperatura ma tramite la potenza dissipata dai circuiti all'interno. Ne risulta che

$$P_{solare} = P_{elettrica}$$

$$\alpha J_s S = VI$$

$$\alpha = \frac{VI}{J_s S}$$

Vediamo alcuni esempi di indici di assorbanza comuni trovati sul web:

Tabella 2: indici di assorbanza materiali	
Alluminio lucidato	0,05
Alluminio, superficie grezza	0,07
Alluminio molto ossidato	0,25
Silicio	0,92

Figura 50 - Esempi di indici di assorbanza

5.2 Analisi termica del sistema ARAMIS - equazioni generali di equilibrio termico

Calcoliamo dunque componente per componente gli apporti di potenza termica indicando con S_i la superficie di ogni faccia, e scriviamo l'equazione generale dell'equilibrio termico del satellite [11].

La radiazione totale su ogni faccia, assumendo che l'incidenza sia la stessa sia per la radiazione terrestre che per quella solare e che essa sia quella che da il massimo apporto di energia, ovvero di 90° , sarà dunque data da:

$$P_i^S = \alpha_i (F_s + F_T) S_i$$

Mentre la radiazione emessa da ogni faccia vale:

$$P_i^E(T) = \sigma \alpha_i T^4 S_i$$

Per calcolare la radiazione terrestre poniamo alcune assunzioni:

- il pianeta si comporta come un corpo nero in accordo con la legge di Stefan-Boltzmann (temperatura della superficie terrestre circa 287 K);
- l'albedo vale 0.367 e dunque il valore di assorbanza ed emissività vale $1 - 0.367 = 0.633$;
- l'intensità di radiazione ad una certa altitudine h si riduce di un fattore di

$$\left(\frac{R}{R+h} \right)^2$$

dove R è il raggio della Terra e si assume h pari a 800 km.

- le facce ricevono tutta l'energia termica irradiata dalla Terra mentre le superfici laterali vengono considerate come se fossero parallele alla superficie terrestre ma ricevono energia solo da metà della superficie, considerandone l'altra metà schermata dal satellite stesso;
- il lato più distante dalla Terra non riceve energia.

Usiamo dunque queste assunzioni per calcolare la superficie totale interagente con la radiazione terrestre. Essa verrà considerata come la somma delle superfici di fronte alla Terra e della metà delle superfici laterali.

Si ottiene dunque questa formula per il calcolo della potenza termica proveniente dalla Terra, dove α_T e T_T sono rispettivamente l'indice di assorbanza e la temperatura della superficie terrestre, mentre i pedici "aff" e "lat" indicano i valori relativi rispettivamente alle facce frontali e laterali rispetto alla superficie terrestre.

$$P^T = \sigma \alpha_T T_T^2 \left(\frac{R}{R+h} \right)^2 \left(\alpha_{aff} S_{aff} + \alpha_{lat} \frac{S_{lat}}{2} \right) = F_E \left(\alpha_{aff} S_{aff} + \alpha_{lat} \frac{S_{lat}}{2} \right)$$

Dove abbiamo chiamato

$$F_E = \sigma \alpha_T T_T^4 \left(\frac{R}{R+h} \right)^2 = 185 \text{ W/m}^2$$

La conversione in energia elettrica e il suo accumulo possono essere calcolate come

$$P_i^P = \gamma_i (F_S + F_T) S_i$$

Dove per l'incidenza abbiamo fatto le stesse assunzioni riguardo alla radiazione solare.

L'accumulo dovuto alla capacità termica del sistema con massa M e capacità termica C costanti vale:

$$P^C(t) = \frac{d}{dt}(mcT) = mc \frac{d}{dt}T$$

L'eventuale generazione interna di calore dovuta ai circuiti elettronici, ed esclusa a quella dei pannelli fotovoltaici già considerati, la chiamiamo P^J .

Infine scriviamo dunque l'equazione per l'equilibrio termico:

$$\sum_{\text{illuminate}} (P_i^S - P_i^P) - \sum_{\text{tutte le facce}} (P_i^E(T)) + P^J + P^T - P^C(t) = 0$$

5.3 CALCOLO RESISTENZE TERMICHE PER TILE 8L E 3L

La resistenza termica è un termine usato in fisica e particolarmente in elettronica per indicare la difficoltà del calore nell'attraversare un mezzo solido, liquido o gassoso. Essa ci servirà a calcolare le differenze di temperatura fra le posizioni del satellite rispetto alla quale viene calcolata, in quanto rappresenta la differenza di temperatura nel tratto considerato per ogni Watt di potenza ricevuto da uno dei due lati.

Una volta reperiti i dati sulle proprietà termiche di conducibilità dei materiali presenti e le geometrie della sezione del satellite, calcoliamo le resistenze termiche che questi fanno al passaggio del flusso di calore.

Essendo entrambe dovute alla capacità di moto degli elettroni del materiale in esame, la resistenza termica che incontra il calore attraversando un corpo di sezione S e lato L, si definisce con l'analogia a quella elettrica, ossia:

$$R = r * (L/S)$$

Dove r è la resistività termica specifica del materiale (ossia l'inverso della sua conducibilità) e S è la sezione totale che attraversa il flusso calore, indipendentemente dal lato L che si considera.

Riportiamo dunque i valori di conducibilità dei materiali presenti nelle due configurazioni.

Tabella 6: Conducibilità materiali	
Materiale	$\sigma_{\Theta} \left(\frac{W}{Km} \right)$
Alluminio	210
FR4 (through-plane)	0.29 - 0.343
FR4 (in-plane)	0.81 - 1.059
Rame	401
Resina termoconduttiva	0.81 – 1.25
Silicio (Celle)	148

Figura 51 - Indici di conducibilità materiali usati

Per il PCB in-plane si farà un discorso a parte, mentre per il PCB through plane assumiamo una conduttività di 0,3 W/Km.

5.3.1 RESISTENZA TERMICA TRA IL CENTRO E I BORDI DELLA TILE

Calcoliamo la resistenza al passaggio del flusso di calore tra il centro della tile e i suoi bordi per le prime due diverse configurazioni.

CONFIGURAZIONE 3L

Consideriamo la fonte di calore al centro della tile circolare di area 20 cm^2 e raggio $R_1 = 2,5 \text{ cm}$, e calcoliamo la resistenza termica tra il centro e i lati esterni della tile, rispettivamente di raggio $R_2=8,25 \text{ cm}$ e $R_3=16,5 \text{ cm}$. Detto ciò la resistenza termica tra il centro e i bordi della tile sarà data dal parallelo delle resistenze termiche di alluminio e FR4:

$$R_{CE} = (R_{CE,Al} // R_{CE,PCB})$$

Dove la resistenza dell'alluminio può calcolarsi:

$$R_{CE,Al} = \int_{R_1}^{R_2} \frac{dR}{K_{Al} 2\pi R h} = \frac{1}{K_{Al} 2\pi h} \ln \left(\frac{R_2}{R_1} \right)$$

E quella del PCB allo stesso modo per entrambi i raggi, con l'attenzione che il PCB non è composto dalla sola conduttività del FR4, ma anche da quella del copper in rame che conduce molto. Considerando la parte in FR4 spessa in totale $0,9 \text{ mm}$ e quella del copper in rame di $0,1 \text{ mm}$, calcoliamo la conduttività termica del PCB come media pesata fra i due, ottenendo un valore di $69,16 \text{ W/Km}$.

Si potrebbe ipotizzare che l'effetto del copper aumenta anche la conducibilità del FR4 through-plane, ma ciò non è così scontato. Se in direzione in-plane il copper contribuisce molto al trasporto del moto elettronico lungo la piastra, non è così in direzione normale, nella quale esso ha uno spessore molto minore di quello qui considerato. Il fatto è che lo spessore considerato per il copper viene leggermente aumentato in modo da considerare anche l'elevata capacità conduttiva delle piste del circuito, le quali sono molto sottili e praticamente trascurabili trasversalmente. Si ottiene per il lato corto (R_2)

$$R_{CE} = 0,461 \text{ K/W}$$

E per quello lungo:

$$R_{CE} = 0,729 \text{ K/W}$$

CONFIGURAZIONE 8L

Facciamo gli stessi calcoli per la configurazione 8L, considerando la medesima conduttività di prima per il PCB. Otteniamo per il lato corto.

$$R_{CE} = 1,717 \text{ K/W}$$

Mentre per quello lungo

$$R_{CE} = 2,714 \text{ K/W}$$

Notiamo, come previsto, che la presenza dell'alluminio abbassa notevolmente tale valore.

5.3.2 RESISTENZA TERMICA TRA LATI PARALLELI

Tra lati paralleli la resistenza al passaggio del flusso di calore andrà calcolata tenendo conto di

tutta l'area di attraversamento del flusso di calore, compresa quella dei correnti a cui sono imbullonate le tile. Abbiamo su ogni lato due rod a profilo quadrato con lato di 6 mm e lunghezza pari al lato della piastra. Calcoleremo tale resistenza per entrambe le configurazioni sia in presenza delle celle solari che non.

CONFIGURAZIONE 3L CON PANNELLI

Per la configurazione 3L con pannelli abbiamo che la resistenza tra lati paralleli vale

$$R_{BB} = R_{Al,1} // R_{PCB,1} // R_{celle} + R_{Al,2} // R_{PCB,2}$$

Dove la resistenza delle parti in alluminio (analogamente per il PCB senza considerare le aree dei correnti) si divide in:

$$R_{1,Al} = \frac{L_{scheda}}{K_{Al}(Lh + 2(L_2)^2)}$$

$$R_{2,Al} = \frac{L - L_{scheda}}{K_{Al}(Lh + 2(L_2)^2)}$$

In ragione del fatto che la scheda di comunicazione tra pannelli e piastra non copre tutta la superficie ma solo una parte. Abbiamo che L_{scheda} vale 120 mm per il lato corto e 280 mm per il lato lungo. E dove

$$R_{celle} = \frac{L}{K_{silicio}S_{celle}}$$

Dove le celle solari si estendono sulla piastra per la stessa dimensione della scheda, sono spesse 0,15 mm e la superficie considerata è quella trasversale di passaggio del flusso di calore.

Otteniamo:

$$R_{BB_LATO\ CORTO_3L_PAN} = 1,061\ K/W$$

$$R_{BB_LATO\ LUNGO_3L_PAN} = 3,866\ K/W$$

CONFIGURAZIONE 3L SENZA PANNELLI

Per la configurazione senza pannelli abbiamo semplicemente

$$R_{BB} = R_{Al} // R_{PCB}$$

Otteniamo:

$$R_{BB_LATO\ CORTO_3L} = 1,221\ K/W$$

$$R_{BB_LATO\ LUNGO_3L} = 2,298\ K/W$$

CONFIGURAZIONE 8L CON PANNELLI

Per questa configurazione, analogamente a prima avremo che la resistenza vale:

$$R_{BB} = R_{PCB,1} // R_{celle} + R_{PCB,2}$$

Con le grandezze definite come precedentemente otteniamo:

$$R_{BB_LATO\ CORTO_8LPAN} = 4,041\ K/W$$

$$R_{BB_LATO\ LUNGO_8LPAN} = 16,122\ K/W$$

CONFIGURAZIONE 8L SENZA PANNELLI

Anche qui avremo semplicemente

$$R_{BB} = R_{PCB}$$

Ossia:

$$R_{BB_LATO\ CORTO_8L} = 4,519\ K/W$$

$$R_{BB_LATO\ LUNGO_8L} = 18,075\ K/W$$

5.3.4 RESISTENZA TERMICA TRA LA FACCIA ESTERNA E QUELLA INTERNA

Calcoliamo la resistenza termica della tile all'attraversamento trasversale del calore.

CONFIGURAZIONE 3L CON PANNELLI

Consideriamo la tile composta trasversalmente dagli strati già visti di pannelli, PCB, alluminio ed anche da uno strato di resina termoconduttiva. La resistenza al passaggio di calore varrà:

$$R_{eq} = R_{celle} + R_{Al} + R_{PCB} + 2R_{adesivo}$$

Dove

$$R_{celle} = \frac{L_{celle}}{K_{celle}S_{celle}}$$

Con l'unica differenza che ora L rappresenta lo spessore trasversale e S l'area in pianta occupata dalle celle. La stessa premessa si applica per il calcolo delle resistenze dell'alluminio e del PCB:

$$R_{Al} = \frac{L_{Al}}{K_{Al}S_{Al}}$$

Si ha anche:

$$R_{adesivo} = \frac{L_{adesivo}}{K_{adesivo}S_{adesivo}}$$

Dove la sezione dell'adesivo è la stessa della piastra, mentre il suo spessore L lo consideriamo di 0,1 mm e la sua conducibilità di 7,5 W/Km.

Otteniamo:

$$R_{eq_3L_pan} = 0,0680\ K/W$$

Che è poco diversa da quella calcolata senza pannelli semplicemente escludendo il contributo delle celle

$$R_{eq_3L} = 0,0678 \text{ K/W}$$

CONFIGURAZIONE 3L SENZA PANNELLI

Vedi sopra

CONFIGURAZIONE 8L

Per questa configurazione avremo:

$$R_{eq} = R_{celle} + R_{PCB} + 2R_{adesivo}$$

Che si calcolano come già visto. Otteniamo:

$$R_{eq_3L_PAN} = 0,0985 \text{ K/W}$$

E come prima è molto semplice calcolarne il valore anche senza pannelli

$$R_{eq_3L} = 0,0984 \text{ K/W}$$

5.4 CALCOLO DEI DIFFERENZIALI DI TEMPERATURA

Procediamo al calcolo dei differenziali di temperatura caso per caso ricordando la formula:

$$\Delta T = PR_{termica}$$

Dove P è la potenza netta che investe la superficie in esame.

5.4.1 POTENZA TERMICA RAGGIUNTA

Vediamo qual è il livello di potenza che investe la nostra tile. Si noti che l'effetto dell'albedo terrestre che investe la superficie posteriore del satellite andrà considerato solo nel calcolo fra lati paralleli, mentre per il differenziale tra il centro della tile e i bordi si considererà prima la potenza termica solare e successivamente la potenza termica generata da un ipotetico componente elettronico concentrato nel centro della tile di 10 W.

TILE SENZA CELLE

Per le tile senza celle solari il livello di potenza solare che investe la superficie vale

$$P_{solare} = \alpha_{senzacelle} J_s S$$

Dove dagli esperimenti al simulatore solare si ottiene $\alpha_{senza\ celle} = 0,53$ per la tile 3L e 0,58 per la tile 8L.

TILE CON CELLE

Per le tile con le celle fotovoltaiche dovremo considerare l'apporto di potenza che viene assorbito e trasformato in potenza elettrica per l'alimentazione dei sistemi del satellite. Si avrà:

$$P_{solare} = (1 - \eta_{celle}) \alpha_{globale} J_s S$$

Si noti che quando si calcolerà il differenziale tra lati paralleli bisognerà considerare anche l'albedo terrestre che investe la faccia opposta a quella investita da sole, e quindi la potenza termica da considerare non sarà P_{solare} ma $0,6 \times P_{solare}$ essendo l'albedo di intensità $0,4 \times P_{solare}$, in più dovrà considerarsi solo mezza superficie della tile investita dal sole per considerare anche l'irraggiamento emesso dalla facce.

Il rendimento medio delle celle vale 0,23 e $\alpha_{globale}$, sempre da laboratorio, vale 0,59 per la tile 3L con celle e 0,65 per la 8L.

Senza dover riportare ogni calcolo, riportiamo direttamente la tabella dei differenziali di temperatura per le tile 3L e 8L comprensivi di pannelli solari e non calcolati con Excel.

5.5 MODELLO TERMICO PER IL SANDWICH [12]

Nel caso di pannelli con core in honeycomb, la determinazione della loro effettiva conducibilità termica è complicata poiché il calore trasferito, sia in-plane che through-plane, è generalmente una funzione non lineare della temperatura. Inoltre le modalità di trasporto del calore interagiscono tra loro complicando ancora il problema.

In ogni caso il calore trasmesso dall'aria, che risulta in minima parte comunque presente, è trascurabile. Inoltre in molti casi la struttura del honeycomb è composta da fogli molto sottili rendendo molto piccolo il salto di temperatura attraverso di essi; questo comporta che la resistenza termica attraverso di essi può essere trascurata rendendo possibile un'analisi mono

dimensionale.

Utilizzando le semplificazioni citate sopra, le equazioni della conduzione e dell'irraggiamento possono essere ricavate tramite una procedura alle differenze finite.

Immaginiamo di dividere il sistema in J elementi indipendenti ed isotermi, ognuno di essi subirà un trasferimento di calore in ingresso che si dividerà tra la conduzione degli elementi vicini, un irraggiamento in funzione dei fattori di vista netti (in letteratura denominati "net radiation factor"), una parte fornita ad esempio da un fluido ed una produzione interna. Questo calore in ingresso comporterà un aumento di temperatura il cui studio ci permetterà di effettuare l'analisi.

Il calore trasmesso per conduzione dall'elemento $m-1$ all'elemento m sarà:

$$A_{m,m-1} k_{m,m-1} \frac{(T_{m-1} - T_m) \Delta \tau}{l_{m,m-1}}$$

Dove i simboli rappresentano:

- $A_{m,m-1}$ l'area media di conduzione
- $K_{m,m-1}$ la conducibilità termica media
- $l_{m,m-1}$ la distanza tra i centri degli elementi
- $\Delta \tau$ l'infinitesimo temporale

Analogamente possiamo scrivere il calore trasmesso dall'elemento $m+1$ a m

$$A_{m,m+1} k_{m,m+1} \frac{(T_{m+1} - T_m) \Delta \tau}{l_{m,m+1}}$$

E consideriamo anche il calore di irraggiamento ricevuto:

$$\sigma \sum_{k=1}^J A_k \epsilon_k (G_{k,m} - \delta_{k,m}) T_k^4 \Delta \tau$$

FATTORI DI VISTA NETTI

I fattori di vista netti o net radiation factors indicano quanta parte dell'energia emessa da un elemento viene assorbita dal secondo. Per esempio $G_{1,2}$ è la frazione di energia totale emessa dall'elemento 1 che viene assorbita dall'elemento 2 dopo un numero infinito di riflessioni. Questi valori sono in funzione dei "configuration factors" definiti come frazione dell'energia totale emessa da un elemento, che risulta direttamente incidente su un altro elemento, e delle assorbanze degli elementi stessi.

Cerchiamo ora di ricavare i net radiation factors in forma chiusa.

Prendiamo un sistema chiuso diviso in J elementi isotermi con una data assorbanza indipendente dalla posizione dell'elemento.

Detta A_m l'area del suddetto elementino e q_n il flusso di calore totale emesso per irraggiamento,

$F_{n,m}$ sarà la frazione di energia che viene irradiata da n a m .

Il calore trasmesso a m sarà dunque:

$$Q_{n,m} = A_n F_{n,m} q_n$$

Mentre quello assorbito e riflesso saranno rispettivamente

$$Q_{n,mass} = \alpha_m A_n F_{n,m} q_n$$

$$Q_{n,mrif} = (1 - \alpha_m) A_n F_{n,m} q_n$$

La stessa cosa succederà per ogni elementino m_i .

Possiamo dunque scrivere l'energia totale trasmessa dall'elemento n all'elemento m dopo una singola riflessione come:

$$A_n q_n \sum_{m_i=1}^J (1 - \alpha_{m_i}) F_{n,m_i} F_{m_i,m}$$

Per considerare l'energia che gli elementi m_i hanno riflesso non direttamente su m, ma che al secondo ciclo viene assorbita da esso, dovremmo aggiungere una seconda sommatoria.

Ora, indicando le matrici [F], [α], [E] = 1- α e con $G_{n,m}$ la frazione dell'energia emessa dall'elemento n che viene assorbita da m dopo infinite riflessioni, si ha

$$[G] = \sum_{i=0}^{\infty} [[F][E]]^i [F][\alpha]$$

matematicamente esprimibile come:

$$[G] = [[I] - [F][E]]^{-1} [F][\alpha]$$

Il calore proveniente da un fluido ad una determinata temperatura $T_{a,m}$

$$A_m k_m (T_{a,m} - T_m) \Delta \tau$$

E infine abbiamo l'eventuale produzione di calore

$$A_m Q_m \Delta \tau$$

Il calore netto in ingresso all'elemento m sarà dunque la somma di tutte le quantità viste precedentemente e causerà un aumento di temperatura:

$$\Delta q_m = \rho_m V_m C_{p,m} \Delta T_m$$

Facendo dunque tendere l'intervallo di tempo a zero avremo dunque il bilancio termico dell'elemento m

$$\rho_m V_m C_{p,m} \frac{dT_m}{d\tau} = A_m Q_m + A_m k_m (T_{a,m} - T_m) + A_{m,m+1} k_{m,m+1} \frac{(T_{m+1} - T_m)}{l_{m,m+1}} + A_{m,m-1} k_{m,m-1} \frac{(T_{m-1} - T_m)}{l_{m,m-1}} + \sigma \sum_{k=1}^J A_k \epsilon_k (G_{k,m} - \delta_{k,m}) T_k^4$$

Che stazionariamente diventa

$$A_m Q_m + A_m k_m (T_{a,m} - T_m) + A_{m,m+1} k_{m,m+1} \frac{(T_{m+1} - T_m)}{l_{m,m+1}} + A_{m,m-1} k_{m,m-1} \frac{(T_{m-1} - T_m)}{l_{m,m-1}} + \sigma \sum_{k=1}^J A_k \epsilon_k (G_{k,m} - \delta_{k,m}) T_k^4 = 0$$

5.5.1 DETERMINAZIONE CONDUCEBILITA' EFFETTIVA DEL HONEYCOMB [13]

Si assume come approssimazione che la conducibilità termica sia costante al valore corrispondente alla temperatura media del pannello. Inoltre si considera che le celle del nido d'ape siano cilindri circolari retti.

Nel caso di queste particolari strutture è possibile fare una assunzione molto importante.

Poiché lo spessore dei due strati che costituiscono le facce del sandwich è solitamente molto sottile, è possibile trascurare l'esistenza di un gradiente di temperatura attraverso di esse.

Nella realtà è necessario valutare bene caso per caso. Se prendiamo i dati da un produttore notiamo che esistono anche pannelli sandwich con pelli in alluminio laminato con spessori fino anche a 2 mm, chiaramente in tal caso va assolutamente considerata la trasmissione del calore tra il centro ed i bordi della piastra.

Considerando che la nostra faccia più spessa in PCB ha una dimensione trasversale di 0,8 mm, possiamo dire che quest'ipotesi è corretta, e ciò si vede anche dai calcoli sulle resistenze termiche in quanto la resistenza di questa è di circa 0,05 K/W, ossia davvero trascurabile.

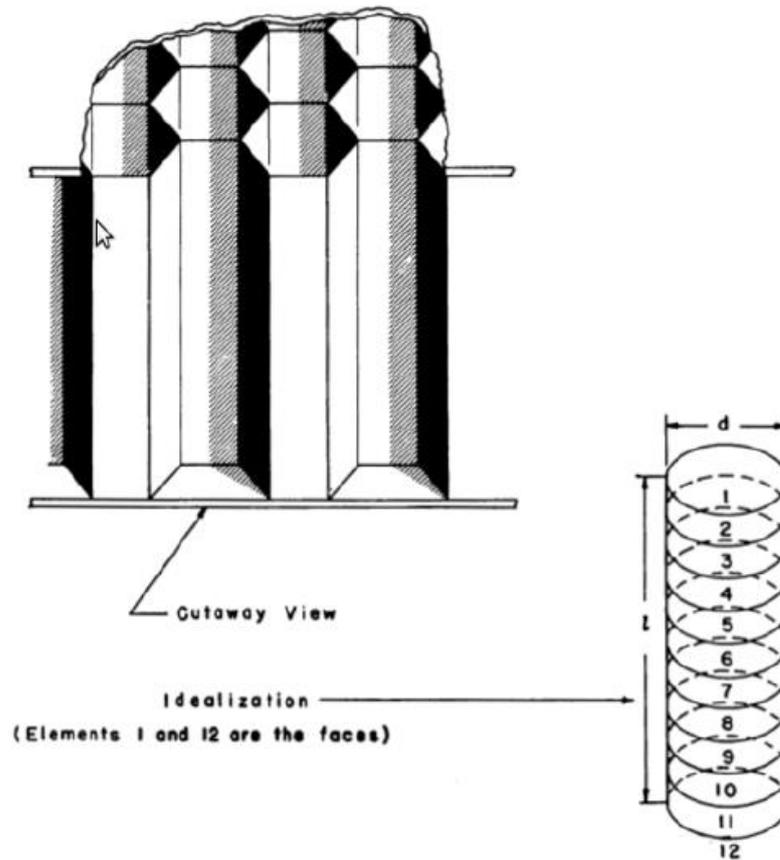


Figura 52 - Discretizzazione cella honeycomb

Vediamo come modellare il trasferimento del calore all'interno del honeycomb.

Il metodo consiste nel dividere ogni cilindro in 10 parti di lunghezza pari a $l/10$.

Si considera che le due facce, corrispondenti agli elemento 1 e 12, siano di temperatura nota e che nel core non ci sia apporto di calore. Come riferimento per la distanza degli elementi si prende il centro di essi, in tal modo la distanza sarà pari a $l/10$ per gli elementi da 2 a 11, e di $l/20$ per la distanza tra 1 e 2 e 11 e 12.

In base alle assunzioni viste otteniamo dunque tre equazioni.

Per l'elemento 2:

$$10 \frac{k\Delta A}{l} (2T_1 - 3T_2 + T_3) + \sigma \sum_{k=1}^{12} A_k \epsilon_k (G_{k,2} - \delta_{k,2}) T_k^4 = 0$$

Per gli elementi da 3 a 10

$$10 \frac{k\Delta A}{l} (T_{m-1} - 2T_m - T_{m+1}) + \sigma \sum_{k=1}^{12} A_k \epsilon_k (G_{k,m} - \delta_{k,m}) T_k^4 = 0$$

Per l'elemento 11

$$10 \frac{k\Delta A}{l} (T_{10} - 3T_{11} + 2T_{12}) + \sigma \sum_{k=1}^{12} A_k \epsilon_k (G_{k,11} - \delta_{k,11}) T_k^4 = 0$$

Se definiamo una temperatura adimensionale T_m si possono ridurre le equazioni in forma adimensionale

$$\bar{T}_m = \left(\frac{\sigma l A_l}{k \Delta A} \right)^{\frac{1}{3}} T_m$$

Quindi, se T_1 e T_{12} , il rapporto $\lambda = l/d$ (altezza/diametro celle) e le emissività sono date, allora possiamo risolvere le equazioni per la distribuzione di temperatura attraverso il pannello. Poiché siamo all'equilibrio la quantità di calore rimossa dalla faccia fredda deve essere bilanciata da un apporto di calore sulla faccia calda. Il flusso netto si ottiene quindi, in funzione delle temperature adimensionali, come

$$Q_{12} = \left(\frac{k\Delta A}{\sigma l A_1} \right)^{1/3} \frac{k\Delta A}{l A_1} \left[20 (\bar{T}_{11} - \bar{T}_{12}) + \sum_{k=1}^{12} \frac{A_k}{A_1} \epsilon_k (G_{k,12} - \delta_{k,12}) \bar{T}_k^4 \right]$$

Ricaviamo dunque la definizione della conducibilità effettiva k_e dalla formula del flusso di calore scritta sia tramite la definizione generale, sia tramite quella che utilizza le temperature adimensionalizzate.

$$Q_{12} = \frac{k_e}{l} (T_1 - T_{12}) = \left(\frac{k\Delta A}{\sigma l A_l} \right)^{\frac{1}{3}} \frac{k_e}{l} (\bar{T}_1 - \bar{T}_{12})$$

Sostituendo si ottiene quindi l'equazione dell'effettiva conducibilità termica del sandwich.

$$k_e = \frac{Q_{12} l}{T_1 - T_{12}}$$

Traiamo dunque il grafico dell'andamento del gradiente di temperatura attraverso la direzione perpendicolare al piano medio del pannello, dove possiamo vedere due curve estreme in funzione del λ [5].

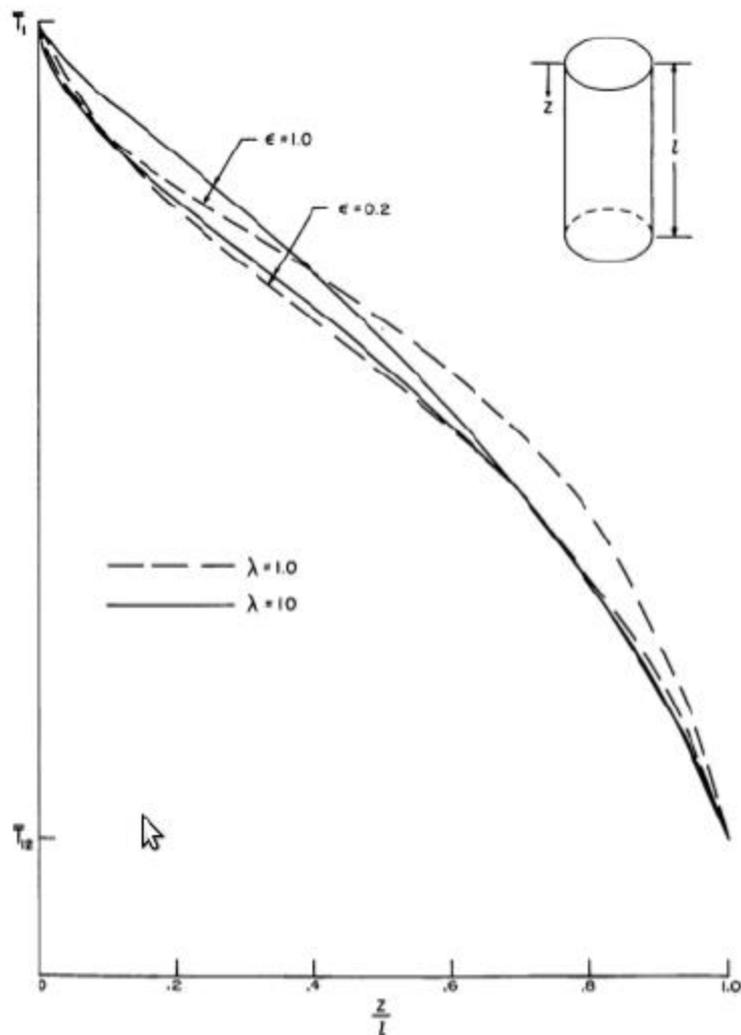


Figura 53 - Andamento della temperatura attraverso il sandwich

Notiamo che il gradiente di temperatura alla faccia fredda è maggiore di quello risultante da una distribuzione lineare attraverso il pannello e, conseguentemente, un apporto maggiore di calore viene trasmesso alla faccia fredda per conduzione quando viene considerato l'irraggiamento.

da [4] possiamo trarre una funzione analitica in forma chiusa che permetta di scrivere l'espressione del calore trasferito da una faccia all'altra in una piastra sandwich con core di tipo honeycomb.

Esso sarà dato dalla somma del calore trasferito dalla conducibilità

$$\frac{k\Delta A}{lA_1} (T_1 - T_{12})$$

E dal irraggiamento

$$f(\lambda, \epsilon)\sigma (T_1^4 - T_{12}^4) = \left[0,664(\lambda + 0.3)^{-0.69} \epsilon^{1.63(\lambda+1)^{-0.89}} \sigma (T_1^4 - T_{12}^4) \right]$$

funzione appunto di λ e dell'emissività ϵ .

In questa equazione compare $f(\lambda, \epsilon)$ che ha il significato di un'emissività effettiva.

Questa espressione è stata ricavata da Swann su una base di 1200 valori di calcolati con una deviazione massima del 6.5 %.

Si ricava dunque infine

$$\frac{k_e A}{k \Delta A} = 1 + 0.664(\lambda + 0.3)^{-0.69} e^{1.63(\lambda+1) - 0.89} \left(\bar{T}_1^2 + \bar{T}_{12}^2 \right) (\bar{T}_1 + \bar{T}_{12})$$

Espressione diretta del calore totale trasmesso rispetto a quello dovuto alla conduzione. Dall'espressione precedente si ricava dunque una dipendenza del coefficiente di effettiva conduzione dalla temperatura, essa è dovuta alla non linearità della trasmissione per irraggiamento.

Possiamo a questo punto plottare il grafico che indica k_e al variare della differenza di temperatura tra le due facce e della temperatura della faccia calda T_1 .

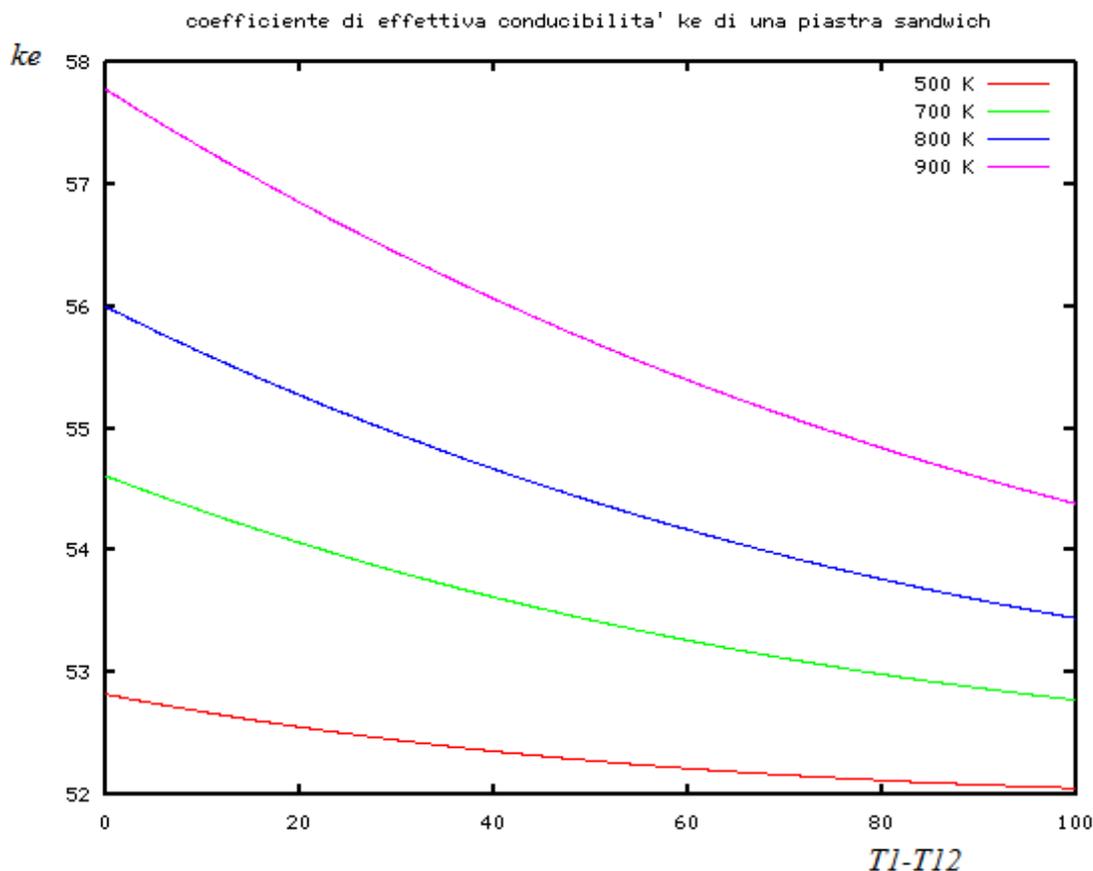


Figura 54 - andamento della conducibilità effettiva al variare di $T_1 - T_{12}$

5.5.2 DIFFERENZIALI DI TEMPERATURA PER IL SANDWICH

In base a quanto detto calcoliamo le differenze di temperatura per la configurazione sandwich. Considerando che la temperatura assoluta della faccia esterna T_1 sia minore dei 500 K del grafico, possiamo assumere con una certa approssimazione, che l'honeycomb abbia una conducibilità:

Ke_honey_through plane = 50 W/Km

Ke_honey_in plane = 11 W/Km

La conducibilità in-plane, si determina con una media pesata dei materiali presenti sul volume totale del core.

Detto ciò passiamo al calcolo delle resistenze termiche e dei differenziali tipici di temperatura.

RESISTENZA E DIFFERENZIALE TRA IL CENTRO E I BORDI

Analogamente a quanto fatto per la piastra singola studiamo il differenziale di temperatura in funzione della resistenza termica tra il centro ed i bordi della tile in configurazione sandwich.

Avremo che la resistenza totale tra il centro e bordi varrà:

$$R_{CE} = (R_{CE\ SAND} // R_{CE\ PCB})$$

Dove vale sempre la relazione

$$R_{CE,SAND} = \int_{R_1}^{R_2} \frac{dR}{K_S 2\pi R h}$$

Sia per il core che per il PCB delle facce; otteniamo

$$R_{CE_sand_lato\ corto} = 1,3614\ K/W$$

$$R_{CE_sand_lato\ lungo} = 2,151805522\ K/W$$

E calcoliamo il differenziale tra centro e bordi dovuto al componente elettronico da 10 W di potenza termica e dal sole

	ΔT transistor centrale [K]	ΔT sole senza pannelli [K]
SANDWICH lato corto centro-bordi	13,61	53,71
SANDWICH lato lungo centro-bordi	21,52	84,89

Si noti come in direzione in-plane la conducibilità dell'alluminio che compone l'honeycomb vada a ridursi completamente.

RESISTENZA TRA LATI PARALLELI

Anche qui avremo che con pannelli la resistenza in presenza di pannelli varrà

$$R_{BB} = R_{SAND,1} // R_{PCB,1} // R_{celle} + R_{SAND,2} // R_{PCB,2}$$

Mentre senza

$$R_{BB} = R_{SAND} // R_{PCB}$$

Dove ciascuna grandezza è definita come in precedenza. Otteniamo:

$$R_{BB_sand\ lato\ corto_pannelli} = 3,226\ K/W$$

$$R_{BB_sand\ lato\ lungo_pannelli} = 12,706\ K/W$$

$$R_{BB_sand\ lato\ corto} = 0,990\ K/W$$

$$R_{BB_sand\ lato\ lungo} = 3,944\ K/W$$

Dai quali otteniamo i seguenti differenziali di temperatura (Si ricorda di considerare l'albedo terrestre e metà sezione della tile):

	ΔT con pannelli [K]	ΔT senza [K]
Sandwich lato corto	32,73	11,72
Sandwich lato lungo	128,89	46,68

Si noti il valore della differenza di temperatura che si instaura sul lato lungo del sandwich.

RESISTENZA DIFFERENZA DI TEMPERATURA TRA LE FACCIE DEL SANDWICH

Determinata la conducibilità effettiva del core del sandwich through-plane che tiene conto anche dell'irraggiamento fra celle, calcoliamo come in precedenza le resistenze e i differenziali di temperatura tra le sue facce esterna ed interna

$$R_{eq} = R_{celle} + R_{SAND} + R_{PCB} + 2R_{adesivo}$$

Che vale con celle fotovoltaiche, mentre senza avremo

$$R_{eq} = R_{SAND} + R_{PCB} + 2R_{adesivo}$$

Otteniamo

$$R_{eq_sand_panels} = 0,071\ K/W$$

$$R_{eq_sand} = 0,070\ K/W$$

Ed infine

	ΔT con pannelli [K]	ΔT senza [K]
Sandwich	2,37	2,77

6 RISULTATI

Vengono in questo capitolo riportati tutti i risultati derivanti dalle analisi condotte.

6.1 ANALISI MODALE

Riportiamo i valori di confronto generale per le 3 configurazioni. Successivamente riportiamo i valori delle frequenze naturali e del massimo spostamento trasversale della tile in condizione di dinamica libera non smorzata.

I valori di rigidezza membranale inseriti derivano dal software Patran, che li calcola automaticamente durante la creazione del laminato; essi sono rappresentati dal determinante della matrice di rigidezza a cui fanno riferimento e sono normalizzati secondo il valore assunto dalla configurazione 8L.

Lo stesso vale per i valori della rigidezza a taglio, i quali sono ottenuti integrando lungo il core i moduli di taglio Q_{44} e Q_{55} di ogni configurazione (per la configurazione 8L si è ipotizzato il core formato da 6 degli 8 strati).

	8L	SANDWICH	3L
massa a secco [kg]	0,166	0,139	0,355
h a secco [mm]	1,600	7,450	2,700
rigidezza a taglio [adim]	1,000	4,291	2,941
rigidezza membranale [adim]	1,000	0,937	1,365

In rosso sono riportati i valori migliori. Si noti la bontà del sandwich in termini di massa e rigidezza trasversale.

6.1.1 FREQUENZE NATURALI E SPOSTAMENTI MASSIMI

Configurazione 8L

Si ricorda che il calcolo analitico delle frequenze naturali di questa configurazione è stato effettuato col modello semi-empirico di Leissa per piastre rettangolarmente ortotrope e che il modello FEM è stato creato con un laminato 2D.

Riportiamo le frequenze trovate con Leissa per poter avere un collegamento tra il numero di semionde lungo i due lati della piastra e l'autovalore (o il modo) corrispondente.

m	n	gamma 2	epsilon 2	A	B	C	f [Hz]
1	1			4,73	4,73	151,30	224,05
1	2		7,85	4,73	7,85	565,52	594,04
1	3		11,00	4,73	11,00	1216,61	1154,80
1	4		14,14	4,73	14,14	2110,50	1200,97
2	1	7,85	4,71	7,85	4,73	565,52	276,73
3	1	11,00	4,71	11,00	4,73	1216,61	391,38
4	1	14,14	4,71	14,14	4,73	2110,50	563,50

2	3	7,85	11,00	7,85	11,00	4547,66	1183,28
3	2	11,00	7,85	11,00	7,85	4547,66	704,32
3	3	11,00	11,00	11,00	11,00	9783,49	1240,94
2	2	7,85	7,85	7,85	7,85	2113,89	628,40
4	2	14,14	7,85	14,14	7,85	7888,98	875,32
4	3	14,14	11,00	14,14	11,00	16971,75	1032,40
3	4	11,00	14,14	11,00	14,14	16971,75	1119,45
2	4	7,85	14,14	7,85	14,14	7888,98	1378,65

Modo	8l no panels FEM [Hz]	8l panels FEM [Hz]	Leissa analitico senza pannelli [Hz]	Errore relativo %
1	250,56	297,25	224,05	11,17
2	318,38	379,13	276,73	14,00
3	436,45	523,36	391,38	10,89
4	604,29	729,41	563,50	6,99
5	649,30	766,45	594,04	8,89
6	719,18	848,60	628,40	13,47
7	820,12	987,44	875,32	6,51
8	835,91	994,75	704,32	17,09
9	999,45	1184,01	1032,39	3,24
10	1082,54	1317,46	1200,97	10,37
11	1209,47	1438,31	1119,45	7,73
12	1236,94	1452,37	1154,80	6,87
13	1307,57	1534,27	1183,28	9,98
14	1390,62	1671,09	1240,94	11,38
15	1424,90	1696,60	1378,65	3,30

Si noti come i due approcci portino a risultati diversi ma sempre entro un errore relativo abbastanza piccolo. Chiaramente il più affidabile è il calcolo simulativo ad elementi finiti.

In più avremo che lo spostamento massimo trasversale W_{max} che la piastra effettuerà in configurazione di dinamica libera vibrante, sarà quello legato alla prima frequenza naturale e posto nel punto centrale della piastra. Dal file di testo f06 di Nastran andiamo al leggere la deformazione massima legata al primo modo di vibrare, detto anche modo fondamentale:

$W_{MAX_SENZA\ PANNELLI\ 8L} = 191,56\ mm$

$W_{MAX_CON\ PANNELLI\ 8L} = 165,48\ mm$

Configurazione SANDWICH

Si ricorda che la determinazione analitica delle frequenze naturali trasversali della tile è stata condotta trasformando il sistema di equazioni differenziali del moto della piastra, in un sistema di equazioni lineari attraverso l'uso del metodo variazionale di Rayleigh-Ritz; tale sistema finale ha come incognite le costanti di approssimazione delle variabili del problema. Il metodo FEM è stato implementato con un modello laminato 2D e con un modello 3D in cui si è modellato il core del sandwich con elementi solidi.

Riportiamo i valori delle frequenze trovate sempre in Hertz:

Modo	Sandwich 2D con pannelli [Hz]	Sandwich 2D senza pannelli	Sandwich 3D senza pannelli	Rayleigh
1	1535,34	1381,70	1425,38	1571,34
2	1904,96	1723,97	1771,49	2012,14
3	2528,43	2306,14	2369,05	2784,02
4	3363,50	3101,26	3223,11	3385,69
5	3759,50	3464,56	3607,01	3631,73
6	4081,03	3781,76	3941,51	4856,36
7	4358,37	4071,56	4250,00	5334,25
8	4606,49	4301,93	4457,75	5798,98
9	5314,64	5009,11	5237,88	6580,84
10	5469,92	5182,34	5379,78	6718,55
11	6176,15	5880,88	6128,36	6818,42
12	6664,63	6343,79	6647,65	6952,79
13	6723,74	6405,16	6697,64	7500,36
14	6994,45	6627,27	6926,87	8151,67
15	7160,06	6892,22	7208,26	8985,68

Si noti come il metodo di Rayleigh tenda ad aumentare il valore delle frequenze naturali

Riportiamo gli spostamenti massimi che la deformata di questa configurazione subisce durante l'oscillazione libera, i quali sono corrispondenti al primo modo fondamentale. I primi riportati sono quelli legati all'analisi FEM 2D, mentre i secondi sono quelli relativi all'analisi 3D.

$W_{MAX_SENZA\ PANNELLI\ SANDWICH\ 2D} = 193,66\ mm$

$W_{MAX_CON\ PANNELLI\ SANDWICH\ 2D} = 165,10\ mm$

$W_{MAX_SENZA\ PANNELLI\ SANDWICH\ 3D} = 176,96\ mm$

Si noti come siano molto simili a quelli trovati per la configurazione 8L.

Configurazione 3L

Si ricorda che la determinazione analitica delle frequenze naturali trasversali di questa tile è stata condotta trasformando il sistema di equazioni differenziali del moto della piastra, in un sistema di

equazioni lineari attraverso l'uso del metodo variazionale di Rayleigh-Ritz; tale sistema finale ha come incognite le costanti di approssimazione delle variabili del problema. Il metodo FEM è stato implementato con un modello laminato 2D.

Riportiamo i valori delle frequenze trovate:

freq [Hz]	3L with panels	3L no panels	Rayleigh
1	491,82	467,30	501,19
2	628,08	596,26	646,08
3	869,16	823,82	1002,25
4	1214,03	1149,03	1232,87
5	1277,17	1215,12	1344,22
6	1413,3	1344,78	1498,37
7	1644,38	1564,33	2010,76
8	1658,12	1567,73	2102,71
9	1972,75	1875,59	2194,82
10	2197,93	2076,76	2509,97
11	2398,63	2278,63	2512,66
12	2442,85	2327,57	2893,04
13	2579,05	2457,80	2990,71
14	2806,98	2671,41	3076,60
15	2831,81	2678,62	3378,77

Si noti anche qui come Rayleigh tenda ad approssimare per eccesso il valore delle frequenze.

Riportiamo gli spostamenti massimi trasversali della deformata del piano medio legata al primo modo di vibrazione, presenti sul file di risultati f06 di Nastran.

$W_{MAX_SENZA\ PANNELLI\ 3L} = 131,21\ mm$

$W_{MAX_CON\ PANNELLI\ 3L} = 121,84\ mm$

Si noti che tali si sono ridotti rispetto alle due configurazioni precedenti in ragione della maggiore rigidità membranale di questa configurazione.

6.1.2 OSSERVAZIONI SULL'ANALISI MODALE

Osserviamo che la configurazione migliore per la tile di Aramis è quella sandwich; Essa si presenta come la soluzione con massa minore e maggior rigidità trasversale, ma è caratterizzata da uno spessore che è circa 4 volte quello delle altre due configurazioni e quindi definisce un ingombro volumico maggiore.

La futura ottimizzazione della tile potrà essere fatta scegliendone un'altra che presenti un core in honeycomb trasversalmente più sottile di quello di 6,35 mm qui considerato, in modo da ridurre appunto l'ingombro volumico.

6.2 ANALISI STATICA AL LANCIO

Riportiamo i valori di spostamento massimo trasversale della tile in fase di lancio, considerando il piano della tile normale all'asse del lanciatore.

I valori sono espressi in mm.

accelerazione	8L [mm]	8L con pannelli	SANDWICH	SANDWICH con pannelli	3L	3L con pannelli
1g	0,0060	0,0068	0,0031	0,0029	0,0043	0,0040
5g	0,0360	0,0683	0,0091	0,0083	0,0276	0,0219
10g	0,0959	0,0883	0,0285	0,0232	0,0579	0,0500

Si noti la maggiore capacità del sandwich di contrastare le azioni trasversali.

6.3 ANALISI TERMICA

Riportiamo i risultati ottenuti dall'analisi termica delle tile

6.3.1 DIFFERENZIALE DI TEMPERATURA TRA CENTRO E BORDI

Riportiamo la tabella con le differenze di temperatura tra il centro della tile senza pannelli e i bordi sia in caso di potenza in arrivo dal sole, sia in caso di potenza termica generata da un componente elettronico posto al centro della tile (10 W).

	ΔT transistor [K]	ΔT sole [K]
3L lato corto	4,25	16,78
3L lato lungo	6,72	26,53
8L lato corto	24,98	107,83
8L lato lungo	39,48	170,44
SANDWICH lato corto centro-bordi	13,61	53,71
SANDWICH lato lungo centro-bordi	21,52	84,89

Si noti come la presenza dell'alluminio faccia sì che la tile conduca meglio.

6.3.2 DIFFERENZIALE TRA LATI PARALLELI

Qui abbiamo i seguenti valori per la configurazione con pannelli e senza:

	ΔT con pannelli [K]	ΔT senza pannelli [K]
3L lato corto	10,76	14,45
3L lato lungo	39,22	27,20
8L lato corto	45,16	58,53
8L lato lungo	180,18	234,10
Sandwich lato corto	32,73	11,72
Sandwich lato lungo	128,89	46,68

Si noti l'elevata differenza di temperatura tra lati paralleli che si ottiene con la configurazione 8L.

6.3.3 DIFFERENZIALE TRA FACCIA INTERNA ED ESTERNA

Qui abbiamo:

	ΔT con pannelli [K]	ΔT senza pannelli [K]
3l trasversale	2,30	2,67
8l trasversale	3,67	4,25
Sandwich	2,37	2,77

E' abbastanza chiaro come la configurazione 8L necessiti di pompe di calore e circuiti di conduzione per smaltire dei così elevati ΔT fra lati paralleli, i quali sono talmente elevati da compromettere seriamente le proprietà meccaniche dei materiali e la resistenza dei componenti hardware.

Tutto ciò non stupisce considerando le differenze di conducibilità tra i materiali delle due configurazioni.

7 CONCLUSIONI

Anche se termicamente molto meno conduttivo della configurazione 3L, la soluzione sandwich rimane la migliore, siccome più rigida e molto più leggera delle altre due.

Sulle strutture spaziali, infatti, il problema di scarsa conduzione termica si risolve in modo abbastanza semplice con qualche accorgimento di progettazione. Le strade percorribili in questo senso senza dover cambiare materiali sono:

- Creare delle piste conduttrici di rame o altri materiali idonei che permettano al flusso di calore di spostarsi liberamente aumentando la conduttività della struttura;
- Collegare gli elementi sottoposti a forti incrementi di temperatura a delle pompe termiche di calore.

Si consiglia pertanto l'adozione della soluzione sandwich con core più stretto, in modo da ridurre l'ingombro volumico, combinata all'inserimento di strisce di conduzione tra lati paralleli della scheda.

Si noti che l'aumento del peso della tile dovuto alle eventuali strisce conduttrici è contrastato dalla riduzione di peso che si ha stringendo il core.

8 APPENDICE CODICI

Si riporta il codice Matlab col quale vengono calcolati gli autovalori del problema modale per la configurazione sandwich col metodo di Rayleigh-Ritz. Si noti che è lo stesso codice usato anche per la stessa analisi della configurazione 3L, nel quale cambiano però i dati di laminazione e il fattore di correzione del taglio.

Le misure e i dati della proprietà dei materiali sono espressi in unità di misura coerenti (mm, MPa, Kg/mm³).

Si noti come il fatto che la w abbia un grado di approssimazione più alto complichino l'automatizzazione del calcolo.

```
clear all
close all
clc
```

%DEFINIZIONE GEOMETRIE PIASTRA%

```
a=324;
b=159;
h= 7.45;
```

%DEFINIZIONE PROPRIETA' ELASTICHE E GEOMETRIE DELLE FACCE DEL SANDWICH%

```
E1_faces=24000;
E2_faces=20000;
E3_faces=20000;
poiss12_faces=0.095;
poiss21_faces=0.114;
poiss23_faces=0.095;
poiss32_faces=0.095;
poiss13_faces=0.095;
poiss31_faces=0.114;
G12_faces=12000;
G23_faces=12000;
G13_faces=800;
rho_faces=0.00000192;
```

%DEFINIZIONE PROPRIETA' ELASTICHE E GEOMETRIE DEL CORE DEL SANDWICH%

```
E1_core=100;
E2_core=80;
E3_core=2345;
poiss12_core=0.7518;
poiss21_core=0.60144;
poiss23_core=0.0000999;
poiss32_core=0.002928;
poiss31_core=0.003;
poiss13_core=0.000128
G12_core=10;
G23_core=359;
G31_core=897;
rho_core=0.00000013;
h_faceint=-0.002375;
h_core=0.003175;
%fattori di taglio scelti%
ktx=0.599783;
kty=0.424381;
```

%creazione delle matrici di rigidezza e delle matrici di rigidezza ridotta per facce e core%

```
delta_faces=(1-(poiss12_faces*poiss21_faces)-(poiss23_faces*poiss32_faces)-(poiss31_faces*poiss13_faces)-
2*poiss21_faces*poiss32_faces*poiss13_faces))/(E1_faces*E2_faces*E3_faces)
```

```
C_faces=((1-(poiss23_faces*poiss32_faces))/(E1_faces*E2_faces*delta_faces), (poiss21_faces+(poiss31_faces*poiss23_faces))/(E2_faces*E3_faces*delta_faces),
(poiss13_faces+(poiss12_faces*poiss23_faces))/(E1_faces*E2_faces*delta_faces),0,0,0;
(poiss21_faces+(poiss31_faces*poiss23_faces))/(E2_faces*E3_faces*delta_faces), (1-(poiss13_faces*poiss31_faces))/(E1_faces*E3_faces*delta_faces),
(poiss32_faces+(poiss12_faces*poiss31_faces))/(E1_faces*E3_faces*delta_faces), 0, 0, 0;
(poiss13_faces+(poiss12_faces*poiss23_faces))/(E1_faces*E2_faces*delta_faces), (poiss32_faces+(poiss12_faces*poiss31_faces))/(E1_faces*E3_faces*delta_faces),
(1-(poiss12_faces*poiss21_faces))/(E1_faces*E2_faces*delta_faces),0,0,0;
0,0,0,G13_faces, 0, 0;
```

```

0,0,0,0, G23_faces,0;
0,0,0,0, G12_faces];

Q_faces=[C_faces(1,1)-(C_faces(1,3)^2)/C_faces(3,3), C_faces(1,2)-(C_faces(1,3)*C_faces(2,3)/C_faces(3,3)),0,0,0;
C_faces(1,2)-(C_faces(1,3)*C_faces(2,3)/C_faces(3,3), C_faces(2,2)-(C_faces(2,3)^2)/C_faces(3,3)),0,0,0;
0,0, C_faces(6,6),0,0;
0,0,0, C_faces(4,4),0;
0,0,0,0, C_faces(5,5)];

```

```

delta_core=(1-(poiss12_core*poiss21_core)-(poiss23_core*poiss32_core)-(poiss31_core*poiss13_core)-
(2*poiss21_core*poiss32_core*poiss13_core))/(E1_core*E2_core*E3_core)

```

```

C_core=[(1-(poiss23_core*poiss32_core))/(E1_core*E2_core*delta_core), (poiss21_core+(poiss31_core*poiss23_core))/(E2_core*E3_core*delta_core),
(poiss13_core+(poiss12_core*poiss23_core))/(E1_core*E2_core*delta_core),0,0,0;
(poiss21_core+(poiss31_core*poiss23_core))/(E2_core*E3_core*delta_core), (1-(poiss13_core*poiss31_core))/(E1_core*E3_core*delta_core),
(poiss32_core+(poiss12_core*poiss31_core))/(E1_core*E3_core*delta_core), 0, 0, 0;
(poiss13_core+(poiss12_core*poiss23_core))/(E1_core*E2_core*delta_core), (poiss32_core+(poiss12_core*poiss31_core))/(E1_core*E3_core*delta_core), (1-
(poiss12_core*poiss21_core))/(E1_core*E2_core*delta_core),0,0,0;
0,0,0,G13_core, 0, 0;
0,0,0,0, G23_core,0;
0,0,0,0, G12_core];

```

```

Q_core=[C_core(1,1)-(C_core(1,3)^2)/C_core(3,3), C_core(1,2)-(C_core(1,3)*C_core(2,3)/C_core(3,3)),0,0,0;
C_core(1,2)-(C_core(1,3)*C_core(2,3)/C_core(3,3), C_core(2,2)-(C_core(2,3)^2)/C_core(3,3)),0,0,0;
0,0, C_core(6,6),0,0;
0,0,0, (ktx^2)*C_core(4,4),0;
0,0,0,0, (kty^2)*C_core(5,5)];

```

%impostazione calcolo di [MZI]%

```

MZI_bottom=rho_faces*((h_faceint+h/2), 0,0, 0.5*(h_faceint^2-(h/2)^2),0;
0, (h_faceint+h/2),0,0, 0.5*(h_faceint^2-(h/2)^2);
0,0, (h_faceint+h/2), 0,0;
0.5*(h_faceint^2-(h/2)^2), 0, 0, (1/3)*(h_faceint^3+(h/2)^3),0;
0, 0.5*(h_faceint^2-(h/2)^2), 0, 0, (1/3)*(h_faceint^3+(h/2)^3)];

```

```

MZI_core=rho_core*((h_core-h_faceint), 0,0, 0.5*(h_core^2-(h_faceint)^2),0;
0, (h_core-h_faceint),0,0, 0.5*(h_core^2-(h_faceint)^2);
0,0, (h_core-h_faceint), 0,0;
0.5*(h_core^2-(h_faceint)^2), 0, 0, (1/3)*(h_core^3-(h_faceint)^3),0;
0, 0.5*(h_core^2-(h_faceint)^2), 0, 0, (1/3)*(h_core^3-(h_faceint)^3)];

```

```

MZI_top=rho_faces*((h/2-h_core), 0,0, 0.5*((h/2)^2-(h_core)^2),0;
0, (h/2-h_core),0,0, 0.5*((h/2)^2-(h_core)^2);
0,0, (h/2-h_core), 0,0;
0.5*((h/2)^2-(h_core)^2), 0, 0, (1/3)*((h/2)^3-(h_core)^3),0;
0, 0.5*((h/2)^2-(h_core)^2), 0, 0, (1/3)*((h/2)^3-(h_core)^3)];

```

```

MZI=MZI_bottom+MZI_core+MZI_top;

```

%impostazione del calcolo di [KZI]%

```

KZI_bottom=
[Q_faces(1,1)*(h_faceint+h/2), 0,0, Q_faces(1,2)*(h_faceint+h/2), 0,0,0, Q_faces(1,1)*((h_faceint)^2-(h/2)^2), 0,0,0, Q_faces(1,2)*0.5*((h_faceint)^2-(h/2)^2);
0, Q_faces(3,3)*(h_faceint+h/2), Q_faces(3,3)*(h_faceint+h/2), 0,0,0,0, Q_faces(3,3)*0.5*((h_faceint)^2-(h/2)^2), 0, Q_faces(3,3)*0.5*((h_faceint)^2-(h/2)^2), 0;
0, Q_faces(3,3)*(h_faceint+h/2), Q_faces(3,3)*(h_faceint+h/2), 0,0,0,0, Q_faces(3,3)*0.5*((h_faceint)^2-(h/2)^2), 0, Q_faces(3,3)*0.5*((h_faceint)^2-(h/2)^2), 0;
Q_faces(1,1)*(h_faceint+h/2), 0,0, Q_faces(1,2)*(h_faceint+h/2), 0,0,0, Q_faces(1,1)*0.5*((h_faceint)^2-(h/2)^2), 0,0,0, Q_faces(1,2)*0.5*((h_faceint)^2-(h/2)^2);
0,0,0,0, Q_faces(4,4)*(h_faceint+h/2), 0, Q_faces(4,4)*(h_faceint+h/2), 0,0,0,0,0;
0,0,0,0,0, Q_faces(5,5)*(h_faceint+h/2), 0,0,0,0, Q_faces(5,5)*(h_faceint+h/2), 0,0;
0,0,0,0, Q_faces(4,4)*(h_faceint+h/2), 0, Q_faces(4,4)*(h_faceint+h/2), 0,0,0,0,0;
Q_faces(1,1)*0.5*((h_faceint)^2-(h/2)^2), 0,0, Q_faces(1,2)*0.5*((h_faceint)^2-(h/2)^2), 0,0,0, Q_faces(1,1)*(1/3)*((h_faceint)^3+(h/2)^3), 0,0,0,
Q_faces(1,2)*(1/3)*((h_faceint)^3+(h/2)^3);
0, Q_faces(3,3)*0.5*((h_faceint)^2-(h/2)^2), Q_faces(3,3)*0.5*((h_faceint)^2-(h/2)^2), 0,0,0,0,0, Q_faces(3,3)*(1/3)*((h_faceint)^3+(h/2)^3), 0,
Q_faces(3,3)*(1/3)*((h_faceint)^3+(h/2)^3),0;
0,0,0,0,0, Q_faces(5,5)*(h_faceint+h/2), 0,0,0, Q_faces(5,5)*(h_faceint+h/2), 0,0;
0, Q_faces(3,3)*0.5*((h_faceint)^2-(h/2)^2), Q_faces(3,3)*0.5*((h_faceint)^2-(h/2)^2), 0,0,0,0,0, Q_faces(3,3)*(1/3)*((h_faceint)^3+(h/2)^3), 0,
Q_faces(3,3)*(1/3)*((h_faceint)^3+(h/2)^3),0;
Q_faces(1,1)*0.5*((h_faceint)^2-(h/2)^2), 0,0, Q_faces(1,2)*0.5*((h_faceint)^2-(h/2)^2), 0,0,0, Q_faces(1,1)*(1/3)*((h_faceint)^3+(h/2)^3), 0,0,0,
Q_faces(1,2)*(1/3)*((h_faceint)^3+(h/2)^3)];

```

```

KZI_core= [Q_core(1,1)*(h_core-h_faceint), 0,0, Q_core(1,2)*(h_core-h_faceint), 0,0,0, Q_core(1,1)*((h_core)^2-(h_faceint)^2), 0,0,0, Q_core(1,2)*0.5*((h_core)^2-
(h_faceint)^2);
0, Q_core(3,3)*(h_core-h_faceint), Q_core(3,3)*(h_core-h_faceint), 0,0,0,0,0, Q_core(3,3)*0.5*((h_core)^2-(h_faceint)^2), 0, Q_core(3,3)*0.5*((h_core)^2-
(h_faceint)^2), 0;
0, Q_core(3,3)*(h_core-h_faceint), Q_core(3,3)*(h_core-h_faceint), 0,0,0,0,0, Q_core(3,3)*0.5*((h_core)^2-(h_faceint)^2), 0, Q_core(3,3)*0.5*((h_core)^2-
(h_faceint)^2), 0;
Q_core(1,1)*(h_core-h_faceint), 0,0, Q_core(1,2)*(h_core-h_faceint), 0,0,0, Q_core(1,1)*0.5*((h_core)^2-(h_faceint)^2), 0,0,0, Q_core(1,2)*0.5*((h_core)^2-
(h_faceint)^2);
0,0,0,0, Q_core(4,4)*(h_core-h_faceint), 0, Q_core(4,4)*(h_core-h_faceint), 0,0,0,0,0;
0,0,0,0,0, Q_core(5,5)*(h_core-h_faceint), 0,0,0,0, Q_core(5,5)*(h_core-h_faceint), 0,0;
0,0,0,0, Q_core(4,4)*(h_core-h_faceint), 0, Q_core(4,4)*(h_core-h_faceint), 0,0,0,0,0;

```


9 BIBLIOGRAFIA

- [1] A.Pandolfi *“Appunti di matematica applicata”*
- [2] Kirchhoff G. *“Über das Gleichgewicht und die Bewegung einer elastischen Scheib”, 1850*
- [3] Erasmo Carrera *“Analisi non lineare delle strutture Aerospaziali” 2003*
- [4] Di Sciuva M. *“Bending, vibration and buckling of simply supported thickmultilayered orthotropic plates: an evaluation of a new displacement model”, 1986*
- [5] Murakami H. *“Laminated composite plates theory with improved in-plane Respons”, 1985*
- [6] Di Sciuva M. *“Appunti corso di strutture aeronautiche”*
- [7] A. W. Leissa, *“Vibration of Plates”, 1969*
- [8] MSC.Software Corporation, *“Patran 2010 Reference Manual”, www.mssoftware.com*
- [9] Consulenze private con l'Ing. M. Gherlone
- [10] Puppo G. *“Appunti di metodi numerici e calcolo scientifico”*
- [11] L. Reyneri *“Appunti di sistemi elettronici per applicazioni spaziali”*
- [12] Robert T. Swann *“Heat Transfer and Thermal Stresses in Sandwich Panels”, 1958*
- [13] Robert T. Swann and Claud M. Pittman *“Analysis of effective thermal conductivities of honeycomb-core and corrugated-core sandwich panels”, 1961*
- [14] Tessler, Di Sciuva, Gherlone *“Refined Zigzag Theory for Laminated Composite and Sandwich Plates”, 2013*
- [15] Noor AK, Peters JM, Burton WS. *“Three-dimensional solutions for initially stressed structural sandwiches”, 1989*
- [16] Birman, Bert *“On the Choice of Shear Correction Factor in Sandwich Structures ” , 2002*
- [17] Kant T, Swaminathan K. *“Analytical solutions for free vibration of laminated composite and sandwich plates based on higher-order theory”, 2001*
- [18] Swaminathan K, Patil SS. *“Analytical solutions using a higher order refined computational model with 12 degree of freedom for the free vibration analysis of antisymmetric angle-ply plates”, 2008;*
- [19] Tessler A, Di Sciuva M, Gherlone M. *“Refined Zigzag theory for laminated composite and sandwich plates”, 2009*

*Grazie allo stimato Professor Reyneri e all'Ingegnere Gherlone
per la fiducia, la disponibilità e la collaborazione concessami.*

In entrambi ho scoperto persone squisite.

*Grazie a mia mamma e alla mia famiglia per avermi sostenuto così tanto e
grazie a tutti gli amici per i bei momenti condivisi in questi anni accademici.*

*Particolarmente: Sergio, Davide, Ruggero, Giovanni, Fabio, Filippo, Macciò, Marco M.,
e soprattutto Katia, mia stupenda compagna.*

Dedico questo lavoro a nonno Mario.